PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

Modelos probabilísticos - Ayudantía 14
EYP1025 / EYP1027

Profesor: Reinaldo Arellano
Ayudantes: Jesus Achire y Nicolás Mendicoa

Ejercicio 1

a) Sean $Y|\Lambda \sim \text{Poisson}(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$.
Encuentre $f_Y(y), \mathbb{E}(Y), \text{Var}(Y)$. Muestre que Y es binomial negativa si $\alpha \in \mathbb{Z}$

b) **Propuesto**: Muestre que $Y|N \sim \text{Binom}(N, p)$, $N|\Lambda \sim \text{Poisson}(\Lambda)$ y $\Lambda \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta)$ resulta en la misma $f_Y(y)$.

Ejercicio 2

Una generalización de ensayos Bernoulli es $X_i|P_i \sim \text{Bernoulli}(P_i)$, $i = 1, ..., n$, donde $P_i \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$ y los X_i son independientes.
Este modelo puede ser útil, por ejemplo, cuando se está midiendo la efectividad de un medicamento en n pacientes. Debido a que cada paciente es distinto, no podemos asumir que la efectividad del medicamento es constante. Una variable de interés es $Y = \sum_{i=1}^{n} X_i$, la cantidad total de éxitos.

a) Muestre que $\mathbb{E}(Y) = n\alpha/(\alpha + \beta)$

b) Muestre que $\text{Var}(Y) = n\alpha\beta/(\alpha + \beta)^2$. Cuál es la distribución de Y?

c) Sea ahora $X_i|P_i \sim \text{Binom}(n_i, P_i)$, $i = 1, ..., k$, donde $P_i \sim \text{Beta}(\alpha, \beta)$.
Muestre que

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{\alpha}{(\alpha + \beta)} \sum_{i=1}^{k} n_i$$

$$\text{Var}(Y) = \sum_{i=1}^{k} \text{Var}(X_i)$$

$$\text{con Var}(X_i) = n_i \frac{\alpha\beta(\alpha + \beta + n_i)}{(\alpha + \beta)^2(\alpha + \beta + 1)}$$

Ejercicio 3

Sean $X_1 ...., X_n$ muestras de $N(0, 1)$.

$$Y_1 = \left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i \right|, \qquad Y_2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} |X_i|$$

Calcule $\mathbb{E}(Y_1)$ y $\mathbb{E}(Y_2)$ y encuentre alguna desigualdad entre ellas.

Ejercicio 4

Sean $X_1, ..., X_n$ con $\overline{X}_n, S_n^2$ la media y varianza, respectivamente. Demuestre:

a) $\overline{X}_{n+1} = \frac{X_{n+1} + n\overline{X}_n}{n+1}$

b) $nS_{n+1}^2 = (n-1)S_n^2 + \frac{n}{n+1}(X_{n+1} - \overline{X_n})^2$

Ejercicio Propuesto 1

Sea $X \sim \text{Poisson}(\theta), Y \sim \text{Poisson}(\lambda)$ independientes. Demuestre que $X|X+Y$ es Binomial con $p = (\theta/(\theta+\lambda))$.

Ejercicio Propuesto 2

Sea $Y|X \sim \text{Binom}(n = n, p = X)$, donde $X \sim U(0,1)$. Encuentre:

a) $\mathbb{E}(Y)$ y $\text{Var}(Y)$

b) Distr. conjunta X, Y

c) Distr. condicional de Y

Ejercicio Propuesto 3

Sean $U_i, i = 1, 2, 3, ... \sim U(0,1)$ independientes y sea X con $P(X = x) = c/x!,\ c = 1/(e-1)$. Encuentre la distribución de $Z = \text{mín}\{U_1, ..., U_X\}$.