Departamento de Estadística PUC

Interrogación 2: EYP1025-1027 Modelos Probabilísticos

Profesor: Reinaldo B. Arellano-Valle Ayudante: Eduardo Alarcón Bustamante

Pregunta 1: Sea X una variable aleatoria discreta con función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^n \binom{n}{x}, & \text{si } \ x = 0, 1, \ldots, n \ \ (n \in \mathbb{N}), \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Pruebe que la función generadora de momentos de X esta dada por

$$M_X(t) = \left(\frac{1}{2}\right)^n (e^t + 1)^n, \quad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Usando (a), obtenga la esperanza y la varianza de X
(c) Calcule $\mathrm{E}\{X(n - X)\}$.

Pregunta 2: Sea X una variable aletoria continua con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & \text{si } \ |x| < 1, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

(a) Obtenga $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.
(b) Sea $Y = X^2$. Obtenga $f_Y(y)$ y $\mathrm{E}(Y)$.
(c) Sea $Y = \text{máx}\{0, X\}$. Obtenga $F_Y(y)$ y $\mathrm{E}(Y)$.

Pregunta 3: Suponga que el tiempo de reparación de un cierto artefacto electrónico es una variable aleatoria X con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} e^{-x}, & \text{si } x > 0; \\ 0, & \text{si no,} \end{cases}$$

(a) El costo de reparación de un artefacto es $Y = 2X + 1$.Calcule el costo de reparación esperado.
(b) Sea $Z = \sqrt{\dfrac{\pi}{X}}$ el factor de depreciación. Calcule la esperanza Z.
(c) En (b), calcule la probabilidad que la depreciación sea mayor que su valor esperado.

Indicaciones: 1) Recuerde que: (i) $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$ $(a, b \in \mathbb{R})$*; (ii)* $\int_0^\infty x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^\alpha}$ $(\alpha,\, \lambda > 0)$*, con* $\Gamma(\alpha + 1) = \alpha\Gamma(\alpha)$ $(\alpha > 0)$*,* $\Gamma(n) = (n-1)!$ $(n \in \mathbb{N})$ *y* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$*. 2) Todas las respuestas deben estar claramente justificadas. 3) El puntaje de cada pregunta es 6 puntos, dividido en partes iguales en los diferentes items. El tiempo de duración máximo es de 2:15 hrs.*

– Santiago, 6 de Octubre del 2022 –