Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad de Matemáticas / Departamento de Estadística
EYP 1025-1027: Modelos Probabilísticos
EXAMEN

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Eduardo Alarcón.

Segundo semestre 2022

1. Sean X e Y variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{x}\, e^{-x} e^{-y/x}, & \text{si } \ x \geq 0,\ y \geq 0, \\ \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   a) Indique la densidad marginal de X y la densidad condicional de Y dado $X = x$.
   b) Calcule $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$ usando las propiedades de la esperanza condicional.
   c) Usando la transformación:

$$U = \frac{Y}{X}, \quad V = X,$$

   pruebe que $U,\ V \overset{iid}{\sim} \exp(1)$.

2. Sean X e Y variables aleatorias tales que $Y \mid X = x \sim \mathrm{Bin}(x,p)$ y $X \sim \mathrm{Poisson}(\lambda)$.

   a) Calcule $\mathrm{E}(Y)$ y $\mathrm{Var}(Y)$ usando las propiedades de la esperanza condicional.
   b) Calcule $\mathrm{E}(XY)$ y $\mathrm{Cov}(X,Y)$ usando las propiedades de la esperanza condicional.
   c) Obtenga la distribución marginal de Y.

3. Sea $Y_n = \mathrm{máx}\{X_1, \ldots, X_n\}$, donde $X_1, \ldots, X_n \overset{iid}{\sim} U(0,1)$.

   a) Calcule $\mathrm{E}(Y_n)$ y $\mathrm{Var}(Y_n)$.
   b) Pruebe que $Y_n \xrightarrow{P} 1$
   c) Pruebe que $n(1 - Y_n) \xrightarrow{D} Z \sim \exp(1)$.

Formulas:

1. $Z \sim \mathrm{U}(a,b),\ (-\infty < a < b < \infty) \iff f_Z(z) = \begin{cases} \frac{1}{b-a}, & \text{si } \ a < z < b, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$
2. $Z \sim \exp(\lambda),\ (\lambda > 0) \iff f_Z(z) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda z}, & \text{si } \ z > 0, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$
3. $Z \sim \mathrm{Poisson}(\lambda),\ (\lambda > 0) \iff \mathrm{P}(Z = z) = \begin{cases} \frac{\lambda^z\, e^{-\lambda}}{z!}, & \text{si } \ z = 0, 1, 2, \ldots, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$
4. $Z \sim \mathrm{Bin}(n,p),\ (n = 1, 2, \ldots,\ 0 < p < 1)$

$$\iff \mathrm{P}(Z = z) = \begin{cases} \binom{n}{z} p^z (1-p)^{n-z}, & \text{si } \ z = 0, 1, 2, \ldots, n, \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

Notas:
1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
2) Ud. deberá argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
3) El examen dura 2:15 horas.