PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ayudantía 7

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. Si $X \sim Geom(p)$, entonces $E(X) = 1/p$.

   (a) Utilice la definición de esperanza.

   (b) Utilice el hecho que si X es una variable aleatoria discreta con soporte no negativo, entonces

   $$E(X) = \sum_{x=0}^{\infty} P(X > x) = \sum_{x=1}^{\infty} P(X \geq x)$$

   (c) Calcule $E(X)$ utilizando la función generadora de momentos.

2. Si $X \sim Exp(\lambda)$ entonces $E(X) = 1/\lambda$

   (a) Utilice la definición de esperanza.

   (b) Utilice el hecho que si X es una variable aleatoria con $F_X(0) = 0$, entonces

   $$E(X) = \int_0^{\infty} (1 - F_X(x))dx = \int_0^{\infty} P(X > x)dx$$

   (c) Calcule $E(X)$ utilizando la función generadora de momentos. Caclcule además acá $V(X)$.

3. Utilice la desigualdad de Jensen para demostrar que $V(X) \geq 0$.

4. Sea X una variable aleatoria con $E(X^2) < \infty$, entonces

   $$E(X) = \text{argmin}_{c \in \mathbb{R}} E((X - c)^2)$$

   esto es, demuestre que

   $$V(X) = E((X - E(X))^2) = \min_{c \in \mathbb{R}} E((X - c)^2)$$