PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ayudantía 6

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. Sea X una variable aleatoria Bernoulli de parámetro π. Demuestre que la máxima variabilidad de X se encuentra en $\pi = 0.5$. Entregue una explicación intuitiva de este resultado.

2. Una tienda de computadoras ha comprado tres de cierto tipo a \$500 cada uno y las venderá a \$1000 cada una. El fabricante ha aceptado volver a comprar en \$200 cualquier computadora que no se haya vendido en un tiempo especificado. Denotemos por X al número de computadoras vendidas y supongamos que $p(0) = 0.1$, $p(1) = 0.2$, $p(2) = 0.3$ y $p(3) = 0.4$. ¿Cuál será la utilidad esperada de esta tienda al comprar las tres computadoras?

3. El tiempo, T, que pasa (en horas) antes antes de que una pieza importante de un equipo electrónico utilizado para fabricar un producto empiece a fallar, se puede modelar con la siguiente función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda t} & si \qquad t > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   Se sabe que el 63.2% de las piezas fallan antes de 500 horas. Se seleccionan 8 equipos electrónicos al azar que funcionan de forma independiente ¿Cuál es la probabilidad de que en exactamente 5 de ellos comience a fallar la pieza antes de 1000 horas?

4. El tiempo de reparación (en horas) T, de un artículo se puede modelar a través de la siguiente función de densidad

$$f(t) = \begin{cases} te^{-t} & si \qquad x > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

   El costo de reparación de un artículo es $C = S + kT$, donde la constante k es un costo por unidad de tiempo y la variable aleatoria S toma valores s_1 y s_2 con probabilidades p y $1-p$ respectivamente. Calcule el costo esperado.

5. El salario mensual, en cientos de miles de pesos, de los trabajadores de una empresa es una variable aletoria cuya función de densidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} x-1 & si \quad 1 \leq x < 2 \\ 3-x & si \quad 2 \leq x \leq 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

(a) Encuentre el salario mínimo del 50% de los trabajadores con mayor salario.

(b) ¿Cuál es el salario máximo del 10% de los trabajadores que menos gana?

6. Sea X la variable aleatoria que representa el rendimiento, en toneladas, por hectárea de trigo en un gran terreno. Se sabe que X puede ser modelada mediante la siguiente función de densidad.

$$f(x) = \begin{cases} 3\frac{(x-1)(3-x)}{4} & si \quad 1 \leq x < 3 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Sea Y la ganancia (en millones de pesos) obtenida por la venta de una hectárea, de tal forma que aquellas hectáreas que tienen un rendimiento inferior a 1,2 toneladas, serán vendidas a $1,5. Aquellas hectáreas con un rendimiento entre 1,2 y 2,1 toneladas serán vendidas a $2,3 y aquellas hectáreas con un rendimiento superior a 2,1 toneladas serán vendidas a $3,0. Calcule la ganancia esperada.

7. Los tiempos de falla de los minicomponentes de cierta marca se comportan de manera probabilísticamente independientes y siguiendo un mismo modelo probabilístico. Sea T_i el tiempo de falla del i-ésimo minicomponente, expresado en miles de horas. Suponga que su densidad de probabilidad es:

$$f(t) = \begin{cases} 0.8e^{-t} + 0.4e^{-2t} & si \quad t > 0 \\ 0 & e.o.c \end{cases}$$

Al gerente de la empresa dedicada a la venta de este producto le interesa averiguar sobre aquellos minicomponentes que se venden sin problema y tiene la siguiente información: El 20% de los productos que fallan antes de 100 horas se venden sin problema, el 55% de los productos que tienen un tiempo de falla entre 100 y 600 horas se venden sin problema y el 70% de los productos que tienen un tiempo de falla superior a las 600 horas se venden sin problema.

(a) Se vende un minicomponente al azar, ¿cuál es la probabilidad de que este se venda sin problemas?

(b) Se venden 10 minicomponentes con problemas, ¿cuál es la probabilidad de que 6 de ellos tengan un tiempo de falla entre 100 y 600 horas?.