PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ayudantía 3

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. Si P es una función de probabilidad, demuestre que:

   (a) para toda partición $C_1, C_2, \dots C_k$ de Ω

   $$P(A) = \sum_{i=1}^{k} P(A \cap C_i)$$

   (b) Deduzca desde (a) el teorema de probabilidades totales y el teorema de Bayes.

2. Demuestre que si A y B son eventos independientes, entonces los siguientes pares de eventos también lo son:

   (a) A y B^c
   (b) A^c y B
   (c) A^c y B^c

3. El Problema de Monty Hall es un problema de probabilidad que está inspirado por el concurso televisivo estadounidense *Let's Make a Deal (Hagamos un trato)*, famoso entre 1963 y 1986. Su nombre proviene del presentador, Monty Hall. En este concurso, el concursante escoge una puerta entre tres, y su premio consiste en lo que se encuentra atrás la puerta. Una de ellas oculta un automóvil, y tras las otras dos hay una cabra. Sin embargo, antes de abrirla, el presentador, que sabe dónde está el premio del automóvil, abre una de las otras dos puertas y muestra que detrás de ella hay una cabra. Desde el punto de vista de probabilidades ¿es mejor cambiarse de puerta o mantenerse para ganar el automovil?

4. Dos jugadores A y B alternada e independientemente lanzan una moneda y el primer jugador que obtenga cara es el ganador. Si la primera vez la moneda es lanzada por el jugador A, ¿Cuál es la probabilidad de que A sea el ganador? Suponga que $P(cara) = \pi$.

5. Suponga que se tiene una urna con N bolas idénticas, excepto porque M bolas son rojas y el resto verdes. Se seleccionan aleatoriamente k bolas sin reemplazo. Defina el evento A_x como x *bolas bolas rojas en la muestra de tamaño* k ¿cuál es la probabilidad de A_x?

6. En la urna U_1 hay 2 bolas blancas y 3 bolas negras y en la urna U_2 hay 2 bolas negras. Seleccionamos una urna al azar y extraemos 2 bolas sin reemplazo. Sea A_i el evento: Se extraen i bolas negras.

   (a) Calcule $P(A_0)$, $P(A_1)$ y $P(A_2)$.

   (b) Si se extrayeron 2 bolas negras ¿Cuál es la probabilidad de que haya sido de U_1?

7. Una bolsa contiene 15 monedas. De ellas 7 son normales (tienen cara y sello) y el resto tienen 2 caras. De la bolsa se extrae al azar una moneda y se lanza 10 veces. ¿Cuál es la probabilidad de obtener todas caras?. Suponga independencia entre los resultados obtenidos en cada lanzamiento de la moneda.

8. Para los clientes que compran un refrigerador en una tienda de aparatos domésticos, Sea A el evento en que el refrigerador es fabricado en E.E.U.U, B el evento en que el refrigerador contaba con una máquina para hacer hielos y C el evento en que el cliente adquirió una garantía ampliada. Las probabilidades asociadas al problema son las siguientes.

$$P(A) = 0.75; \quad P(B \mid A) = 0.9; \quad P(B \mid A^c) = 0.8$$
$$P(C \mid A \cap B) = 0.8; \quad P(C \mid A \cap B^c) = 0.6$$
$$P(C \mid A^c \cap B) = 0.7; \quad P(C \mid A^c \cap B^c) = 0.3$$

   Sabiendo que un cliente compró un refrigerador que venía con una máquina para hacer hielos y que adquirió una garantía ampliada, ¿cuál es la prbabilidad de que el refrigerador haya sido fabricado en E.E.U.U?

9. Las ciudades A, B y C se ubican a lo largo de un río (desde C hacia A), que puede estar sujeto a desbordes. Las probabilidades anuales de desborde son 0.2 ; 0.3 y 0.1 para las ciudades A, B y C respectivamente. Los eventos de desborde en cada una de las ciudades no son independientes. Si la ciudad C se inunda en un año dado, la probabilidad de que la ciudad B también se inunde el mismo añoo es 0.6; y si en ambas ciudades hubo inundaciones (B y C), la probabilidad de que la ciudad A también se inunda crece a 0.8. Sin embargo, si la ciudad C no se inunda cierto año, la probabilidad de que ni A ni B se inunde es 0.9. Si las tres ciudades se inundan en un año, se considera como desastroso dicho año. Suponga que las inundaciones entre dos años son independientes ¿Cuál es la probabilidad de que un año dado sea un año desastroso?

10. Ana, Benito y Carlos comparten departamento con un teléfono fijo. 2/5 de todas las llamadas son para Ana, 2/5 para Benito y el resto para Carlos. Evidentemente no siempre están en casa para atender las llamadas. Ana está fuera del departamento el 50% del tiempo, Benito el 75% y Carlos, el más casero, el 25%. Suponiendo que los compañeros se encuentran de forma independiente en casa y que a una persona la llamarán por telefóno independientemente se encuentre en casa, calcule las probabilidades de que:

    (a) No haya alguien en el departamento para responder una llamada.

    (b) Esté la persona a la que se llama.