PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ayudantía 14

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. El tiempo que pasa, en horas, antes que una pieza importante de un equipo electrónico que se utiliza para fabricar un reproductor de DVD empiece a fallar sigue una distribución exponencial donde el 86,47% de las piezas fallan antes de 1000 horas. En una muestra aleatoria de 100 equipos electrónicos, calcule la probabilidad aproximada de que el tiempo medio que pasa antes de que la pieza importante falle se encuentre entre 450 y 550 horas.

2. Sean $X_1, X_2, \ldots$ variables aleatorias independientes con $X_1 = 0$ y para $j \geq 2$,

$$P(X_j = k) = \frac{1}{j^3} I_{(k=\pm 1, \pm 2, \ldots, \pm j)} + \frac{j^3 - 2}{j^3} I_{(k=0)}$$

   Pruebe que si $\alpha > 1/2$, entonces

$$\frac{\sum_{j=1}^{n} X_j}{n^\alpha} \xrightarrow{P} 0$$

3. Suponga que $T_1, T_2, \ldots$ y $S_1, S_2, \ldots$ son variables aleatorias tal que

$$\frac{T_n - E(T_n)}{\sqrt{V(T_n)}} \xrightarrow{D} T \sim N(0,1) \quad \text{y} \quad \frac{E((T_n - S_n)^2)}{\sqrt{V(T_n)}} \to 0$$

   entonces,

$$\frac{S_n - E(S_n)}{\sqrt{V(T_n)}} \xrightarrow{D} N(0,1)$$

4. Sean $X_1, X_2, \ldots X_n$ una muestra con función de distribución F y sea F_n la función de distribución empírica de la muestra, es decir

$$F_n(x) = \frac{\text{Nro observaciones} \leq x}{n}$$

   Muestre que para cada valor fijo de x, se tiene que

   (a) $F_n(x) \xrightarrow{P} F(x)$

(b) $\sqrt{n}(F_n(x)-F(x)) \xrightarrow{D} N(0,\sigma^2(x))$. Encuentre $\sigma^2(x)$.

(c) $F_n(x) \xrightarrow{c.s} F(x)$