PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ayudantía 13

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. El número de bacterias Y por m^3 en un estanque decantador sigue una distribución de $Poisson(X)$, donde X corresponde a la tasa de descarga de un emisario. Registros históricos indican que la tasa, X, se comporta de manera aleatoria regida por una distribución $Gamma(k;\nu)$ con $\nu > 0$ y $k \in \mathbb{N}$.

   (a) Determine la función de distribución de probabilidad del número de bacterias por m^3. ¿Qué modelo reconoce? Identifique sus parámetros.

   (b) Determine la distribución condicional de la tasa de descarga condicional al número de bacterias por m^3 ¿Qué modelo reconoce? Identifique sus parámetros.

2. Suponga que X e Y tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 2\pi^{-1}, & \text{si } |x| < 1; \quad 0 \le y \le 1; \quad x^2 + y^2 \le 1; \\ 0, & \text{si } no; \end{cases}$$

   Verifique que $E(Y) = E(E(Y \mid X))$

3. Demuestre que

$$V(Y) = E(V(Y \mid X)) + V(E(Y \mid X))$$

4. Suponga que el número de accidentes automovilísticos en una carretera concesionada, en un período T, siguen un proceso de Poisson con tasa esperada λT, donde T es una variable aleatoria $Exponencial(\nu)$ que representa el período (en meses) de observación. Defina Y como el número de accidentes automovilísticos en la carretera concesionada. Calcule el valor esperado y la varianza de Y.