PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

**EYP1025/27**
**Modelos Probabilísticos**
**Ayudantía 12**

**Profesor:** Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
**Ayudante:** Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. Sea $X_1, X_2, \ldots, X_n$ una muestra aleatoria (iid) de una variable aleatoria continua $X$ con función de distribución acumulada $F_X(x)$ y densidad $f_X(x)$. Se puede demostrar que la distribución conjunta de los estadísticos de orden, $X_{(i)}, X_{(j)}$, con $1 \leq i < j \leq n$ está dada por:

$$f_{X_{(i)},X_{(j)}}(u,v) = A f_X(u) f_X(v) [F_X(u)]^{i-1} [F_X(v) - F_X(u)]^{j-i-1} [1 - F_X(v)]^{n-j},$$

con $A = \frac{n!}{(i-1)!(j-1-i)!(n-j)!}$. Defina las variables aleatorias rango ($R$) y rango medio ($M$) como $R = X_{(n)} - X_{(1)}$ y $M = \frac{X_{(n)}+X_{(1)}}{2}$.

Suponga una muestra aleatoria de tamaño $n$ desde $X \sim Unif(0,1)$

   (a) Obtenga la distribución conjunta de $R$ y $M$.
   (b) Calcule la distribución marginal de $R$.

2. Sean $X$ e $Y$ dos variables aleatorias. Demuestre que:

   (a) $E_Y(Y) = E_X(E_{Y|X}(Y \mid X))$
   (b) $Cov(X,Y) = Cov(X, E(Y \mid X))$

3. Sean $X$ y $Y$ dos variables aleatorias con densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x,y) = \pi^{-1} I_{x^2+y^2 \leq 1}$$

   (a) Calcule la distribución condicional de $Y$ dado $X$ y obtenga $E(Y \mid X)$.
   (b) Pruebe que $X$ y $Y$ son no correlacionadas ¿son independientes?