PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ayudantía 10

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. Sean $X, Y \overset{iid}{\sim} N(0,1)$. Encuentre la distribución de

$$W = \frac{X + cY}{\sqrt{1+c^2}}.$$

2. Sea G una partición de B, un evento de interés. Defina la variable aleatoria

$$\mathbb{1}_{\{G=i\}}(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{si } \omega = i; \\ 0, & \text{si } \omega \neq i; \end{cases}$$

Para $i \in \{1, \ldots, n\}$. Entonces, sabemos que

$$P(B \mid G) = \sum_{i=1}^{n} P(B \mid G = i)\mathbb{1}_{\{G=i\}}$$

Demuestre que

$$E(P(B \mid G)) = P(B).$$

¿Qué consecuencuas trae este resultado? Discuta.

3. Suponga que X e Y tienen densidad conjunta

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \pi^{-1}, & \text{si } x^2 + y^2 \leq 1; \\ 0, & \text{si } no; \end{cases}$$

   (a) Calcule las distribuciones marginales de $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

   (b) Calcule $cov(X,Y)$ ¿Son X e Y independientes?

4. Sea (X,Y) un vector aleatorio con función de probabilidad

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 1/8 & \text{si } (x,y) \in \{(-1,-1),(-1,1),(1,-1),(1,1)\}; \\ 1/2 & \text{si } (x,y) = (0,0); \\ 0 & \text{eoc ;} \end{cases}$$

(a) Encuentre $f_X(x)$ y $f_Y(y)$.

(b) Calcule $Cov(X,Y)$ y determine si X y Y son independientes. Argumente.

(c) Calcule $V(X+Y)$.

5. Sean $X_n \overset{iid}{\sim} Exp(\lambda)$, $n \geq 1$. Defina $S_n = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$, $n \geq 1$. Encuentre la distribución de S_n e indique su densidad.