PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA
Segundo semestre 2022

EYP1025/27
Modelos Probabilísticos
Ejercicios Unidad 1

Profesor: Reinaldo Arellano-Valle (reivalle@mat.uc.cl)
Ayudante: Eduardo Alarcón-Bustamante (esalarcon@mat.uc.cl)

1. Demuestre las siguientes *Propiedades generales de una medida de probabilidad*: Sea $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ un espacio de probabilidad, entonces:

   (a) **Monotonía**: Si $A \subseteq B$, tal que $A, B \in \mathscr{A}$, entonces $P(A) \leq P(B)$.

   (b) **Subaditividad**: Si $A_1, A_2, \ldots \in \mathscr{A}$, entonces $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) \leq \sum_{n\geq 1} P(A_n)$.

   (c) **Continuidad por abajo**: Si $A_1 \subset A_2 \subset \cdots \in \mathscr{A}$, entonces $P\left(\bigcup_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

   (d) **Continuidad por arriba**: Si $A_1 \supset A_2 \supset \cdots \in \mathscr{A}$, entonces $P\left(\bigcap_{n\geq 1} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} P(A_n)$

2. Un espacio muestral finito $\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}$ se dice equiprobable si $P(\{\omega_i\}) = c$. Demuestre que:

   (a) $c = 1/n$

   (b) Sea A un evento asociado a Ω, donde A tiene $k < n$ elementos ($A = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_k\}$), entonces $P(A) = k/n$

3. Si A, B y C son eventos arbitrarios asociados Ω, demuestre que:

   (a) $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

   (b) $P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$

4. Sean A_1,A_2 y A_3 sucesos tales que $A_1 \cup A_2 \cup A_3 = \Omega$ y $A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_2$. Sabiendo que $P(A_1) = 1/4$ y $P(A_2) = 1/2$, encuentre $P(A_3)$ en función de $P(A_1 \cap A_2)$

5. Suponga que X tiene valores posibles $1, 2, 3, \ldots$ y que $P(X = k) = \frac{1}{2^k}$, para $k = 1, 2, 3, \ldots$. Calcule la probabilida de que X tome un valor par.