Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística
Segundo Semestre del 2020

Modelos Probabilísticos (EYP1027)
Ayudantía 1

1. Demuestre que para cualquier conjunto finito S, se tiene que

   a) Si $|S| = n$ entonces $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

   b) $\mathcal{P}(S)$ es una σ-álgebra.

   c) La intersección de dos σ-álgebras es una σ-álgebra.

2. Demuestre las siguientes propiedades.

   a) Si A es un evento, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$.

   b) $P(\emptyset) = 0$.

   c) Si A y B son eventos tales que $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

   d) Si A es un evento, entonces $P(A) \leq 1$.

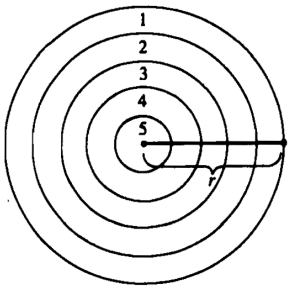
   e) Para cualquier par de eventos A y B se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

3. Considere dos monedas, la primera cumple que $P(\text{Cara}) = v$ y la segunda $P(\text{Cara}) = w$. Además se tiene que al lanzar ambas monedas,

$$P(\text{Cero Caras}) = p_0$$
$$P(\text{Una Cara}) = p_1$$
$$P(\text{Dos Caras}) = p_2$$

   responda si se pueden elegir v y w tal que $p_0 = p_1 = p_2$.

4. Suponga que se tiene un tablero para jugar dardos como en la figura 1 y que las separaciones entre los círculos son de largo $r/5$. El tablero se encuentra colgado en un muro de área A, considere que la probabilidad de que un dardo quede sostenido en el muro o en el tablero es 1.



a) Calcule $P(\text{Obtener i puntos})$

b) Calcule $P(\text{Obtener i puntos} \mid \text{El dardo quedó en el tablero})$

5. Se dice que P es **finitamente aditiva** si para cualquier colección finita de eventos $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ disjuntos se cumple que

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Por otro lado se dice que P es **continua en el vacío** si para cualquier secuencia de eventos $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} \ : \ A_{n=1} \subset A_n$ se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \ \Rightarrow \ \lim_{n\to\infty} P(a_n) = 0$$

Muestre que si P es finitamente aditiva y continua en el vacío, entonces para cualquier secuencia de eventos $\{A_n \ : \ n \in \mathbb{N}\}$ disjuntos se cumple que,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

es decir, es **contable aditiva**.

Sol. Ayud. 1

1. Demuestre que para cualquier conjunto finito S, se tiene que

   a) Si $|S| = n$ entonces $|\mathcal{P}(S)| = 2^n$.

   b) $\mathcal{P}(S)$ es una σ-álgebra.

   c) La intersección de dos σ-álgebras es una σ-álgebra.

a) $\mathcal{P}(S) := \{E : E \subseteq S\}$

$|\mathcal{P}(S)| = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$, usamos el teo del Binom.

$2^n = (1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^{n-k} 1^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

b) Σ es σ-álgebra si cumple que

i) $\emptyset \in \Sigma$

ii) Si $E \in \Sigma \Rightarrow E^c \in \Sigma$

iii) Si $\{A_k\}_{k=1}^{\infty} \in \Sigma \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Sigma$

i) $\emptyset \subseteq S \Rightarrow \emptyset \in \mathcal{P}(S)$

ii) Si $E \in \mathcal{P}(S) \Rightarrow E \subseteq S \Rightarrow E^c \subseteq S$
$\Rightarrow E^c \in \mathcal{P}(S)$

iii) Si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \mathcal{P}(S) \Rightarrow \{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \subseteq S$

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \subseteq S \Rightarrow \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{P}(S)$$

$\therefore \mathcal{P}(S)$ es σ-álgebra.

c) Si Σ_1, Σ_2 son σ-álgebras

$\Sigma = \Sigma_1 \cap \Sigma_2$

i) $\emptyset \in \Sigma_1$ y $\emptyset \in \Sigma_2 \Rightarrow \emptyset \in \Sigma_1 \cap \Sigma_2 = \Sigma$

ii) Si $E \in \Sigma \Rightarrow E \in \Sigma_1$ y $E \in \Sigma_2$

$\Rightarrow E^c \in \Sigma_1$ y $E^c \in \Sigma_2$

$\Rightarrow E^c \in \Sigma$

iii) Si $\{A_k\}_{k \in \mathbb{N}} \in \Sigma \Rightarrow \{A_k\} \in \Sigma_1$

$\{A_k\} \in \Sigma_2$

$\Rightarrow \bigcup A_k \in \Sigma_1$, $\bigcup A_k \in \Sigma_2$

$\Rightarrow \bigcup A_k \in \Sigma$

$\therefore \Sigma_1 \cap \Sigma_2$ es σ-álgebra

2. Demuestre las siguientes propiedades.

   a) Si A es un evento, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$. ✓

   b) $P(\emptyset) = 0$.

   c) Si A y B son eventos tales que $A \subset B$ entonces $P(A) \leq P(B)$.

   d) Si A es un evento, entonces $P(A) \leq 1$.

   e) Para cualquier par de eventos A y B se tiene que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$.

a) $P(S) = 1$, $S = A \cup A^c$, $A \cap A^c = \emptyset$

P es prob.

$P(A \cup A^c) = P(A) + P(A^c)$

$P(S) \Rightarrow 1 = P(A) + P(A^c)$

$\therefore P(A^c) = 1 - P(A)$

b) $P(\emptyset) = P(S^c) = 1 - P(S) = 1 - 1 = 0$ //

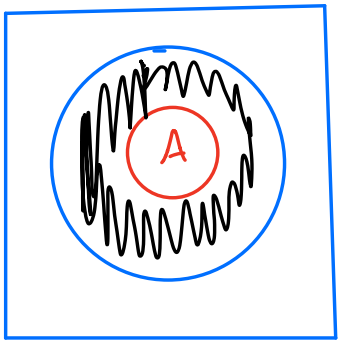
c) Si $A \subseteq B \Rightarrow B = A \cup (B - A)$

$P(B) = P(A \cup (B-A))$

$= P(A) + P(B-A)$

$\Rightarrow P(B) = P(A) + \underbrace{P(B-A)}_{\geq 0}$

$\Rightarrow P(B) \geq P(A)$



d) Pd: $P(A) \leq 1$

Como $A \subseteq S \Rightarrow P(A) \leq \underbrace{P(S)}_{1}$ //

e) Pd: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$

$A \cup B = A - B \cup A \cap B \cup B - A$



$P(A \cup B) = P(A - B) + P(A \cap B) + P(B - A)$ *

$A = (A - B) \cup (A \cap B)$

$P(A) = P(A - B) + P(A \cap B)$

$\Rightarrow P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$.

$P(B - A) = P(B) - P(A \cap B)$.

$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B) + P(A \cap B)$

$\therefore P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$ //

3. Considere dos monedas, la primera cumple que $P(\text{Cara}) = v$ y la segunda $P(\text{Cara}) = w$. Además se tiene que al lanzar ambas monedas,

$$P(\text{Cero Caras}) = p_0$$
$$P(\text{Una Cara}) = p_1$$
$$P(\text{Dos Caras}) = p_2$$

responda si se pueden elegir v y w tal que $p_0 = p_1 = p_2$.

Primero vemos que

$$p_0 = (1-v)(1-w)$$
$$p_1 = (1-v)w + (1-w)v$$
$$p_2 = vw$$

$p_0 = p_2$ $\quad 1 - w - v + vw = vw$

$$v + w = 1$$

$p_1 = p_2$ $\quad w - wv + v - wv = vw$

$$\underbrace{v+w}_{1} = 3vw \Rightarrow vw = 1/3$$

$p_0 = p_2$ $\quad (1-v)v = \frac{1}{3}$

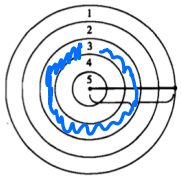
$$v - v^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow v^2 - v + \frac{1}{3} = 0$$

La sol. son Complejas

$\therefore$ no puede pasar que

$p_0 = p_1 = p_2$

4. Suponga que se tiene un tablero para jugar dardos como en la figura 1 y que las separaciones entre los círculos son de largo $r/5$. El tablero se encuentra colgado en un muro de área A, considere que la probabilidad de que un dardo quede sostenido en el muro o en el tablero es 1.



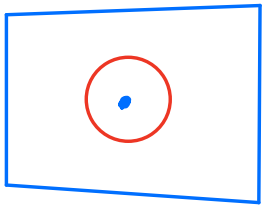
a) Calcule $P(\text{Obtener i puntos})$

b) Calcule $P(\text{Obtener i puntos} \mid \text{El dardo quedó en el tablero})$

a) $P(0 \text{ ptos}) = 1 - \frac{\pi r^2}{A} \to 0$ ✱

$P(3 \text{ ptos}) = \frac{\pi\left(\frac{3r}{5}\right)^2 - \pi\left(\frac{2r}{5}\right)^2}{A}$ ✱

$= \frac{\pi r^2}{A}\left(\frac{3^2 - 2^2}{5^2}\right)$ ✱



$P(i \text{ puntos}) = \begin{cases} 1 - \frac{\pi r^2}{A} & \text{si } i = 0 \\ \frac{\pi r^2}{A}\left(\frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2}\right) & \text{si } i = 1, \ldots, 5 \end{cases}$

b) $P(i \text{ ptos} \mid \text{Acertemos en el tablero}) = \frac{P(i \text{ ptos} \cap \text{Acertar})}{P(\text{Acertar})} = \frac{\frac{\pi r^2}{A}\left(\frac{(6-i)^2 - (5-i)^2}{5^2}\right)}{\frac{\pi r^2}{A}}$

5. Se dice que P es **finitamente aditiva** si para cualquier colección finita de eventos $\{A_k\}_{k=1}^{n}$ disjuntos se cumple que

$$P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

Por otro lado se dice que P es **continua en el vacío** si para cualquier secuencia de eventos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ tal que $\forall n \in \mathbb{N} : A_{n=1} \subset A_n$ se cumple que

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n = \emptyset \Rightarrow \lim_{n\to\infty} P(A_n) = 0$$

Muestre que si P es finitamente aditiva y continua en el vacío, entonces para cualquier secuencia de eventos $\{A_n : n \in \mathbb{N}\}$ disjuntos se cumple que,

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A_n)$$

es decir, es **contable aditiva**.

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k \cup \bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

$$= P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) + P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right)$$

$$\overset{\text{fin. aditiva}}{=} \sum_{k=1}^{n} P(A_k) + P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \quad *$$

$$B_j = \bigcup_{k=j}^{\infty} A_k \qquad B_j \supset B_{j+1}$$

haciendo $n \to \infty$

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) + \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=n+1}^{\infty} A_k\right) \to 0$$