Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matamática
Departamento de Estadística

EYP1027 - Interrogación II
Pauta

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Claudio Alarcón.

Segundo semestre 2019

1. Calcule la media, una mediana y la viarianza de X en los siguientes casos:

   a) X tiene función de probabilidad dada por

$$p_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{4}\binom{2}{x}, & x = 0, 1, 2 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

   Solución:

   Veamos que

$$\begin{aligned} p_X(0) &= \tfrac{1}{4}\tbinom{2}{0} = \tfrac{1}{4} \\ p_X(1) &= \tfrac{1}{4}\tbinom{2}{1} = \tfrac{1}{2} \\ p_X(2) &= \tfrac{1}{4}\tbinom{2}{2} = \tfrac{1}{4} \end{aligned}$$

   Con esto tenemos que

$$E(X) = \sum_{k=0}^{2} k p_X(k) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 2 \cdot \frac{1}{4} = 1$$

$$E(X^2) = \sum_{k=0}^{2} k^2 p_X(k) = 0 + 1 \cdot \frac{1}{2} + 4 \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{2}$$

   Así

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

   La mediana es un $m : P(X \leq m) \geq \frac{1}{2}$ y $P(X \geq m) \geq \frac{1}{2}$. Sea $x \in [1, 2)$, entonces:

$$P(X \leq x) = P(X \leq 1) = p_X(0) + p_X(1) = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$$

$$P(X \geq x) = P(X \geq 1) = p_X(1) + p_X(2) = \frac{3}{4} \geq \frac{1}{2}$$

   Por lo tanto cualquier valor en $[1, 2)$ es la mediana de X.

b) X tiene función de densidad dada por

$$f_X(x)\begin{cases}|x|, & |x|>1\\ 0, & e.o.c.\end{cases}$$

Solución:

Tenemos que

$$E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t)dt=\int_{-1}^{1} t\cdot|t|dt=\int_{-1}^{0}-t^2dt+\int_{0}^{1}t^2dt$$

$$=\Big(-\frac{t^3}{3}\Big|_{t=-1}^{0}\Big)+\Big(\frac{t^3}{3}\Big|_{t=0}^{1}\Big)=-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=0$$

Además tenemos que

$$E(X^2)=\int_{-1}^{1} t^2 f_X(t)dt=\int_{-1}^{0}-t^3dt+\int_{0}^{1}t^3dt$$

$$=\Big(-\frac{t^4}{4}\Big|_{t=-1}^{0}\Big)+\Big(\frac{t^4}{4}\Big|_{t=0}^{1}\Big)=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

Con esto tenemos

$$Var(X)=E(X^2)-E(X)^2=\frac{1}{2}-0=\frac{1}{2}$$

Como tenemos que nuestra variable aleatora X es simétrica respecto a 0, tenemos que la mediana es 0.

$$F_X(0)=\int_{-1}^{0} f_X(t)dt=\int_{_1}^{0}-tdt=\Big(-\frac{t^2}{2}\Big|_{t=1}^{0}\Big)=\frac{1}{2}$$

c) X tiene función de distribución dada por

$$F_X(x)\begin{cases}0, & x<0\\ 1-pe^{-x}, & x\geq 0\end{cases}$$

Solución:

Tenemos que la distribución de X es una distribución mixta, podemos ver que:

$$F_X(0)=p_X(0)=1-p$$

$$\text{Si } x>0, \text{ entonces} = \frac{dF_X(x)}{dx}=pe^{-x}$$

Con esto tenemos que

$$f_X(x)\begin{cases}1-p, & si\ x=0\\ pe^{-x}, & si\ x>0\\ 0, & e.o.c.\end{cases}$$

Tenemos que

$$E(X) = 0 \cdot p_X(0) + p\int_{-\infty}^{\infty} t f_x(t)dt = 0 \cdot (1-p) + p\int_0^{\infty} te^{-t}dt = p\int_0^{\infty} te^{-t}dt = p \cdot E(Y)$$

$$E(X^2) = 0^2 \cdot p_X(0) + p\int_{-\infty}^{\infty} t^2 f_x(t)dt = 0 \cdot (1-p) + p\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt = p\int_0^{\infty} t^2 e^{-t}dt = p \cdot E(Y^2)$$

Donde $Y \sim Exponencial(1)$. Podemos calcular $E(Y)$ y $E(Y^2)$ mediante la función generadora de momentos.

$$M_Y(t) = E(e^{tY}) = \int_0^{\infty} e^{ty}e^{-y}dy = \int_0^{\infty} e^{-(1-t)y}dy = \Big(-\frac{e^{-(1-t)y}}{(1-t)}\Big|_{y=0}^{\infty}\Big) = \frac{1}{1-t}$$

En este caso tenemos la restricción $1 - t > 0$, entonces $1 > t$.

Tenemos que $E(Y^k) = \dfrac{d^k M_Y(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$, entonces:

$$E(Y) = 0 \cdot (1-p) + p \cdot \frac{dM_Y(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{1}{(1-t)^2}\Big|_{t=0} = 1$$

$$E(Y^2) = 0^2 \cdot (1-p) + p \cdot \frac{d^2 M_Y(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{2(1-t)}{(1-t)^4}\Big|_{t=0} = 2$$

Con esto

$$E(X) = p, \qquad E(X^2) = 2p$$

Así

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2p - p^2$$

Para la mediana tenemos dos casos:

- Caso $p \leq \frac{1}{2} \Rightarrow$ La mediana es 0 dado que $F_X(X \leq 0) = p_X(0) = 1 - p \geq \frac{1}{2}$.
- Caso $p > \frac{1}{2} \Rightarrow$ La mediana es el valor $m : F_X(m) = \frac{1}{2}$, esto es,

$$F_X(m) = P_X(X \leq m) = 1 - pe^{-x} = \frac{1}{2} \Rightarrow m = log(2p)$$

2. Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}e^{-|x|}, \quad x \in \mathbb{R}$$

a) Obtenga la función generadora de momentos de X, indicando la región en donde está definida.

Solución:

Tenemos $M_X(t) = E(e^{tX})$

$$E(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_X(x)dx = \int_{-\infty}^{0} e^{tx} \cdot \frac{1}{2}e^{x}dx) \int_{0}^{\infty} e^{tx} \cdot \frac{1}{2}e^{-x}dx$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\int_{-\infty}^{0} e^{(t+1)x}dx + \int_{0}^{\infty} e^{-(1-t)x}dx \Big)$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{e^{(t+1)x}}{t+1}\Big|_{x=-\infty}^{0} - \frac{e^{-(1-t)x}}{(1-t)}\Big|_{x=0}^{\infty} \Big), \ si\ t < 1$$

$$= \frac{1}{2}\Big(\frac{1}{1+t} + \frac{1}{1-t} \Big) = \frac{1}{1-t^2}, \ si\ t < 1.$$

b) Calcula la esperanza y la viaranza de X usando a).

Solución:

Tenemos que $E(X^k) = \dfrac{d^k M_X(t)}{dt^k}\Big|_{t=0}$

Entonces

$$E(X) = \frac{dM_X(t)}{dt}\Big|_{t=0} = \frac{2t}{(1-t^2)^2}\Big|_{t=0} = 0$$

$$E(X^2) = \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2}\Big|_{t=0} = \frac{2(1-t^2)^2 + 4t(1-t^2)}{(1-t^2)^4}\Big|_{t=0} = 2$$

Así

$$Var(X) = E(X^2) - E(X)^2 = 2$$

c) Obtenga la función de distribución (acumulada) de $Y = |X|$

Solución:

Tenemos $F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(|X| < y) = P(-y \leq X \leq y) = F_X(y) - F_X(-y)$.

Encontremos F_X, podemos reescribir f_X de la siguiente forma:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}e^{x}, \ si\ x < 0 \\ \frac{1}{2}e^{-x}, \ si\ x \geq 0 \end{cases}$$

1.- Caso $x < 0$.

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{2}e^{t}dt = \frac{1}{2}\Big(e^{t}\Big|_{t=\infty}^{x} \Big) = \frac{1}{2}e^{x}$$

2.- Caso $x \geq 0$

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^{0} \frac{1}{2} e^t dt + \int_0^x \frac{1}{2} e^{-t} dt = \frac{1}{2}\Big(e^t \Big|_{x=-\infty}^{0} - e^{-t} \Big|_{t=0}^{x} \Big) = 1 - \frac{e^{-x}}{2}$$

Con esto

$$F_X(x) \begin{cases} \frac{1}{2} e^x, & si\ x < 0 \\ 1 - \frac{1}{2} e^{-x}, & si\ x \geq 0 \end{cases}$$

Veamos esto en F_Y

$$F_Y(y) = F_X(y) - F_X(-y) = 1 - \frac{1}{2} e^{-y} - \frac{1}{2} e^{-y} = 1 - e^{-y}.$$

3. Suponga que el tiempo de reparación de un artículo electrónico es una variable aleatoria X con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 2xe^{-x^2}, & x > 0 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

a) El costo de reparación de un artículo es $Y = cX + 1$, donde la constante c es un costo por unidad de tiempo. Calcule el costo de reparación esperado.
Solución:

Tenemos $E(Y) = E(cX + 1) = cE(X) + 1$. Calculemos $E(X)$.

$$E(X) = \int_{-\infty}^{\infty} t f_X(t) dt = \int_0^{\infty} t \cdot 2te^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} 2t^2 e^{-t^2} dt$$

Consideremos el cambio de variable $y = t^2 \Rightarrow dy = 2tdt \Rightarrow t = \sqrt{y}$, dado que $t > 0$.
Con esto tenemos

$$E(X) = \int_0^{\infty} 2ye^{-y} \frac{dy}{2\sqrt{y}} = \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy$$

Por enunciado tenemos que $\displaystyle\int_0^{\infty} x^{\alpha-1} e^{-\lambda x} dx = \frac{\Gamma(\alpha)}{\lambda^{\alpha}}$. Entonces

$$E(X) = \int_0^{\infty} y^{\frac{1}{2}} e^{-y} dy = \int_0^{\infty} y^{\frac{3}{2}-1} e^{-y} dy = \frac{\Gamma(\frac{3}{2})}{1^{\frac{3}{2}}} = \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big)$$

Con esto

$$E(Y) = cE(X) + 1 = c \cdot \Gamma\Big(\frac{3}{2}\Big) + 1.$$

b) Sea $Z = e^{-aX^2} (a > 0)$ el factor de depreciación. Calcule la esperanza y vairanza de Z.
Solución:
Tenemos que

$$E(Z) = E(e^{-aX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-at^2} f_X(t)dt = \int_0^{\infty} e^{-at^2} \cdot 2te^{-t^2} dt$$

$$= \int_0^{\infty} 2te^{-(a+1)t^2} dt$$

Usaremos un cambio de variable para completar esta integral como la distribución de X del enunciado. Usamos $y = \sqrt{a+1}t \Rightarrow dy = \sqrt{a+1}\ dt$, obteniendo

$$E(Z) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{a+1}} y e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{a+1}} = \frac{1}{a+1} \int_0^{\infty} 2ye^{-y^2} dy = \frac{1}{a+1}$$

Ahora veamos $E(Z^2)$

$$E(Z^2) = E\big((e^{-aX^2})^2\big) = E(e^{-2aX^2}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2at^2} f_X(t)dt$$

$$= \int_0^{\infty} e^{-2at^2} \cdot 2te^{-t^2} dt = \int_0^{\infty} 2te^{-(1+2a)t^2} dt$$

Usaremos un cambio de variable para completar esta integral como la distribución de X del enunciado. Usamos $y = \sqrt{1+2a}x \Rightarrow dy = \sqrt{1+2a}\ dx$, obteniendo

$$E(Z^2) = \int_0^{\infty} \frac{2}{\sqrt{1+2a}} y e^{-y^2} \frac{dy}{\sqrt{1+2a}} = \frac{1}{1+2a} \int_0^{\infty} 2ye^{-y^2} dy = \frac{1}{1+2a}$$

Con todo esto

$$Var(Z) = E(Z^2) - E(Z)^2 = \frac{1}{1+2a} - \frac{1}{(1+a)^2} = \frac{a^2}{(1+2a)(1+a)^2}.$$