Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matamática
Departamento de Estadística

EYP1027 - Interrogación I
Pauta

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Claudio Alarcón.

Segundo semestre 2019

1. Sean A_1, A_2, A_3 eventos definidos sobre un mismo espacio de probabilidad. Demuestre los siguientes resultados:

   i) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid A_3) = \mathbb{P}(A_1 \mid A_3) + \mathbb{P}(A_2 \mid A_3)$.
   Solución:

   Se sabe que la probabilidad condicional $P(\cdot|A)$ es un función de probabilidad para cualquier evento A, esto significa que todas las propiedades que funcionan para $P(\cdot)$, tambien funcionan para $P(\cdot|A)$.
   Tenemos que $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces, por Axioma III de Kolmogorov, tenemos que

   $$P(A_1 \cup A_2 \mid A_3) = P(A_1 \mid A_3) + P(A_2 \mid A_3)$$

   ii) Si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces también los son A_1^c, A_2^c y A_3^c.
   Solución:
   Por simplicidad consideremos $A = A_1, B = A_2, C = A_3$, tenemos que
   $P(A \cap B^c)$
   $= P(A) - P(A \cap B) = P(A) - P(A)P(B) = P(A)(1 - P(B)) = P(A)P(B^c)$
   Con esto veamos que
   $P(A^c \cap B^c)$
   $= P(A^c) - P(A^c \cap B) = P(A^c) - P(A^c)P(B) = P(A^c)(1 - P(B)) = P(A^c)P(B^c)$
   Con esto tenemos que A es independiente de B, de manera análoga podemos demostrar que los pares B y C , A y C son idependientes.

   Ahora veamos que $P(A^c \cap B^c \cap C^c) = P(A^c)P(B^c)P(B^c)$, tenemos que

   $P(A^c \cap B^c \cap C^c)$
   $= 1 - P(A \cup B \cup C)$
   $= 1 - \Big(P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(B \cap C) - P(A \cap C) + P(A \cap B \cap C)\Big)$
   $= 1 - \Big(P(A) + P(B) + P(C) - P(A)P(B) - P(B)P(C) - P(A)P(C) + P(A)P(B)P(C)\Big)$

$$
\begin{aligned}
&= 1 - P(A)\Big(1 - P(B) - P(C) + P(B)P(C)\Big) - P(B)\Big(1 - P(C)\Big) - P(C) \\
&= \Big(1 - P(C)\Big) - P(A)\Big(1 - P(C) + P(B)\big(P(C) - 1\big)\Big) - P(B)P(C^c) \\
&= P(C^c) - P(A)\Big(P(C^c) - P(B)P(C^c)\Big) - P(B)P(C^c) \\
&= P(C^c) - P(A)P(C^c)\big(1 - P(B)\big) - P(B)P(C^c) \\
&= P(C^c)\Big(1 - P(A)P(B^c) - P(B)\Big) \\
&= P(C^c)\Big(P(A)P(B^c) + P(B^c)\Big) \\
&= P(C^c)P(B^c)\Big(1 - P(A)\Big) \\
&= P(A^c)P(B^c)P(C^c).
\end{aligned}
$$

2. Suponga que se lanzan dos dados (honestos) distinguibles (1 y 2).

   i) Analice si los siguientes eventos son independientes:
   $A_1 =$ *El resultado del dado 1 es un número impar*,
   $A_2 =$ *El resultado del dado 2 es un número impar*,
   $A_3 =$ *El resultado de ambos dados es el mismo.*

   Solución:

   Consideremos el siguiente arreglo de pares ordenados (a, b) donde a corresponde al resultado obtenido en el dado 1 y b corresponde al resultado obtenido en el dado 2, tenemos 36 casos posibles:

(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)	(1,6)
(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)	(2,6)
(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)	(3,6)
(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)	(4,6)
(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)	(5,6)
(6,1)	(6,2)	(6,3)	(6,4)	(6,5)	(6,6)

   Con esto tenemos que $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ y que $P(A_3) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$
   Veamos si $P(A_1|A_2) = P(A_1)$

$$P(A_1|A_2) = \frac{P(A_1 \cap A_2)}{P(A_2)} = \frac{9/36}{1/2} = \frac{1}{2} = P(A_1)$$

$$P(A_1|A_3) = \frac{P(A_1 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(A_3|A_1)P(A_1)}{P(A_3)} = \frac{(3/18)(1/2)}{1/6} = \frac{1}{2} = P(A_1)$$

$$P(A_2|A_3) = \frac{P(A_2 \cap A_3)}{P(A_3)} = \frac{P(A_3|A_2)P(A_2)}{P(A_3)} = \frac{(3/18)(1/2)}{1/6} = \frac{1}{2} = P(A_2)$$

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{24} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$$

   Entonces tenemos que A_1, A_2, A_3 son independientes de a pares, pero no son mutuamente independientes.

ii) Calcule $\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ y $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3^c)$.

Solución:

$P(A_3|A_1 \cap A_2)$

Tenemos que $A_1 \cap A_2$ tiene un total de 9 casos posibles, de los cuales sólo tres de estos cumplen con que el resultados de ambos es el mismo (1,1),(3,3) y (5,5), por lo tanto

$$P(A_3|A_1 \cap A_2) = \frac{3}{9} = \frac{1}{3} = 0,\overline{3}$$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$

Tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3$ son todos los resultados menos los pares (a, b): a, b pares con $a \neq b$, estos es, $\{(2,4),(2,6),(4,2),(4,6),(6,2),(6,4)\}^C$, con esto tenemos que

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \frac{30}{36} = \frac{5}{6} = 0,8\overline{3}$$

$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3^C)$

Tenemos que $A_1 \cup A_2 \cup A_3^C$ son todos los pares $(a, b) : a, b$ son pares y $a = b$, esto es, $\{(2,2),(4,4),(6,6\}^C$. con esto tenemos que:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup A_3^C) = \frac{33}{36} = \frac{11}{12} = 0,91\overline{6}$$

3. Sea $B_1, B_2, \ldots$ una particíon del espacio muestral de un modelo de probalidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Asuma que $P(B_n) > 0$ para todo n.

i) Demuestre que para cualquier evento $A \in \mathcal{A}$, se tiene que

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n).$$

Solución:

Consideremos

$$P(A) = P(A \cap \Omega) = P(A \cap \Big(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \Big)) = P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A \cap B_n) \Big)$$

Como tenemos que $B_i \cap B_j = \emptyset \ \forall i \neq j$,entonces $(A \cap B_i) \cap (A \cap B_j) = \emptyset \ \forall i \neq j$

Con esto por Axioma III de Kolmogorov se tiene que:

$$P(\bigcup_{n=1}^{\infty} \Big(A \cap B_n) \Big) = \sum_{n=1}^{\infty} \Big(P(A \cap B_n) \Big)$$

Además se sabe que $P(A \cap B) = P(A|B)P(B)$, aplicancdolo en lo anterior tenemos:

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n)$$

ii) Suponga que la primera falla de una máquina durante la n-ésima hora de operación ocurre con probabilidad $(0{,}5)^n$.Si la primera falla de la máquina ocurre durante la n-ésima hora de operación, ella es reparada dentro de tres horas con probabilidad $0{,}3 + (0{,}6)^n$. Sea A el evento de que la primera falla de la máquina sea reparada dentro de 3 horas. Calcule $P(A)$.

Nota: Si $0 < q < 1$*, entonces* $\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = \frac{1}{1-q}$.

Solución:

Definamos los eventos A_n = La maquina falla por primera vez en la n-ésima hora. Por enunciado tenemos que

$$P(A_n) = (0{,}5)^n, \quad P(A|B_n) = 0,3 + (0,6)^n$$

Tenemos que

$$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_k)P(B_k) = \sum_{n=1}^{\infty}(0,3 + (0,6)^n)(0{,}5)^n$$

$$= (0,3)\sum_{n=1}^{\infty}(0,5)^n + \sum_{n=1}^{\infty}(0,6)^n(0,5)^n$$

$$= (0,3)(0,5)\sum_{n=1}^{\infty}(0,5)^{n-1} + \sum_{n=1}^{\infty}(0,3)^n$$

$$= (0,15)\sum_{n=1}^{\infty}(0,5)^{n-1} + (0,3)\sum_{n=1}^{\infty}(0,3)^{n-1}$$

$$= \frac{(0,15)}{1-(0,5)} + \frac{(0,3)}{1-(0,3)} \approx 0,728.$$

4. Se dispone de $n+1$ urnas numeradas del 0 al n, cada una de ellas con n bolitas. La k-ésima urna contiene k bolitas blancas y $n-k$ bolitas negras.

i) Se elige una urna al azar, y de ella se extrae aleatoriamente una bolita. Calcule la probabilidad de que la bolita extraída sea blanca.

Solución:

Definamos los eventos B_k: La k-ésima urna es elegida , $\forall k \in 0, 1, ..., n$

Tenemos que cada urna se elige con la misma probabilidad, es decir,

$$P(B_k) = \frac{1}{n+1}, \ \forall k \in \{0, 1, .., n\}$$

Ademas la k-ésima urna tiene k bolitas blancas y $n-k$ bolitas negras, donde cada bolita tiene la misma probabilidad de ser sacada, entonces

$P(A|B_k) = \frac{k}{n} \ \forall k \in \{0, 1, .., n\}$

Con esto tenemos que

$$P(A) = \sum_{k=0}^{n} P(A|B_k)P(B_k) = \sum_{k=0}^{n} \Big(\frac{1}{n+1}\Big)\Big(\frac{k}{n}\Big) = \Big(\frac{1}{n+1}\Big)\sum_{k=0}^{n}\Big(\frac{k}{n}\Big)$$

$$= \frac{1}{n(n+1)}\sum_{k=0}^{n} k = \frac{1}{n(n+1)}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{1}{2}.$$

ii) Si bolita obtenida en i) fue blanca, calcule la probabilidad (en términos de k y n) de que ella provenga de la k-ésima urna.

Solución:

Queremos $P(B_k|A)$.

$$P(B_k|A) = \frac{P(B_k \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A|B_k)P(B_k)}{P(A)}$$

Tenemos que $P(A|B_k)P(B_k) = \frac{k}{n(n+1)}$, entonces

$$P(B_k|A) = \frac{\frac{k}{n(n+1)}}{1/2} = \frac{2k}{n(n+1)}.$$