Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matamática
Departamento de Estadística

EYP1027 - Evaluación Final
Pauta

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Claudio Alarcón.

Segundo semestre 2019

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con función de probabilidad dada por

$$p_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} \frac{x+y}{36}, & \text{si } \ x, y = 1, 2, 3, \\ \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

   a) Discuta si X e Y son variables aleatorias independientes.
   b) Calcule $\mathbb{E}(X - Y)$ y $Var(X - Y)$.
   c) Calcule la función de probabilidad de $Z = X + Y$

Respuesta:

a.- Podemos encontrar las distribuciones marginales de X e Y haciendo lo siguiente:

$$\mathbb{P}(X = 1) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}(X = 1, Y = y) = \frac{9}{36} = \sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}(X = x, Y = 1) = \mathbb{P}(Y = 1)$$

$$\mathbb{P}(X = 2) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}(X = 2, Y = y) = \frac{12}{36} = \sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}(X = x, Y = 2) = \mathbb{P}(Y = 2)$$

$$\mathbb{P}(X = 3) = \sum_{y=1}^{3} \mathbb{P}(X = 3, Y = y) = \frac{15}{36} = \sum_{x=1}^{3} \mathbb{P}(X = x, Y = 3) = \mathbb{P}(Y = 3)$$

Para ver si son independientes basta ver que

$$\mathbb{P}(X = x, Y = y) = \mathbb{P}(X = x)\mathbb{P}(Y = y) \ \forall \ x, y \in \{1, 2, 3\}$$

Podemos notar que si tomamos $X = 1, Y = 1$ tenemos que:

$$\mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1) = \left(\frac{9}{36}\right)^2 = \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{1}{16}$$

$$\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$$

Entonces como $\mathbb{P}(X = 1, Y = 1) \neq \mathbb{P}(X = 1)\mathbb{P}(Y = 1)$, X e Y no son independientes.

b.- Tenemos que $W := X - Y$ tiene como valores posibles los $w \in \{-2, -1, 0, 1, 2\}$, donde:

$\mathbb{P}(W = -2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) = \frac{1}{9}$

$\mathbb{P}(W = -1) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}(W = 0) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) = \frac{3}{9}$

$\mathbb{P}(W = 1) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) = \frac{2}{9}$

$\mathbb{P}(W = 2) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) = \frac{1}{9}$

Así

$$\mathbb{E}(W) = -2\frac{1}{9} - 1\frac{2}{9} + 0\frac{3}{9} + 1\frac{2}{9} + 2\frac{1}{9} = 0$$

$$\mathbb{E}(W^2) = 4\frac{1}{9} + 1\frac{1}{9} + 0\frac{3}{9} + 1\frac{2}{9} + 4\frac{1}{9} = \frac{10}{9}$$

Con esto

$$\mathbb{E}(X - Y) = \mathbb{E}(W) = 0$$

$$Var(X - Y) = Var(W) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \mathbb{E}(X^2) = \frac{10}{9}$$

c.- Tenemos que $Z = X + Y$ sólo puede tomar los valores en $\{2, 3, 4, 5, 6\}$, en otro caso la probabilidad es 0. Tenemos que:

$\mathbb{P}(Z = 2) = \mathbb{P}(X = 1, Y = 1) = \frac{2}{36}$

$\mathbb{P}(Z = 3) = \mathbb{P}(X = 2, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 2) = \frac{6}{36}$

$\mathbb{P}(Z = 4) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 1) + \mathbb{P}(X = 1, Y = 3) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 2) = \frac{12}{36}$

$\mathbb{P}(Z = 5) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 2) + \mathbb{P}(X = 2, Y = 3) = \frac{10}{36}$

$\mathbb{P}(Z = 6) = \mathbb{P}(X = 3, Y = 3) = \frac{6}{36}$

En conclusión:

$$p_Z(z) = \mathbb{P}(Z = z) = \begin{cases} \frac{2}{36}, & \text{si } z = 2 \\ \frac{6}{36}, & \text{si } z \in \{3, 6\} \\ \frac{12}{36}, & \text{si } z = 4 \\ \frac{10}{36}, & \text{si } z = 5 \\ 0, & \text{en otro caso.} \end{cases}$$

2. Suponga que los lado X e Y de una placa rectagular son variables aleatorias con función densidad conjunta dada por

$$f_{X,Y}(x) = \begin{cases} x+y, & \text{si } \ (x,y) \in (0,1)^2, \\ \\ 0, & \text{si no.} \end{cases}$$

a) Calcule la correlación entre X e Y.

b) Calcule la esperanza y varianza del perímetro de la placa.

c) Calcule la probabilidad de que el área de la placa exeda a su valor esperado.

Respuesta:

a.- Tenemos que

$$\mathbb{E}(XY) = \int_0^1 \int_0^1 xy(x+y)dxdy = \int_0^1 y\Big(\int_0^1 (x^2+xy)\ dx\Big)dy$$

$$= \int_0^1 y\Big(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2y}{2}\Big|_{x=0}^1\Big)dy = \int_0^1 y\Big(\frac{y}{2}+\frac{1}{3}\Big)dy = \int_0^1 \Big(\frac{y^2}{2}+\frac{y}{3}\Big)dy$$

$$= \Big(\frac{y^2+y^3}{6}\Big|_{y=0}^1\Big) = \frac{1}{3}$$

Además tenemos que

$$f_X(x) = \int_0^1 (x+y)dy = x\int_0^1 dy + \int_0^1 y\ dy = x + \frac{1}{2}, \quad x \in [0,1]$$

De manera análoga, por simetría

$$f_Y(y) = y + \frac{1}{2}, \quad y \in [0,1]$$

Por lo que $\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y)$

$$E(X) = \int_0^1 x(x+\frac{1}{2})\ dx = \Big(\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{4}\Big|_{x=0}^1\Big) = \frac{7}{12}$$

Con todo esto tenemos:

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \frac{1}{3} - \Big(\frac{7}{12}\Big)^2 = \frac{48-49}{144} = -\frac{1}{144}$$

b.- El perímetro es la suma de sus lados, por lo que tenemos que calcular la esperanza y la varianza de la variable aleatoria $P = 2(X + Y)$

$$\mathbb{E}(P) = \mathbb{E}(2(X+Y)) = 2\mathbb{E}(X) + 2\mathbb{E}(Y) = 4\mathbb{E}(X) = 4\frac{7}{12} = \frac{7}{3}$$

$$Var(P) = Var(2(X+Y)) = 4Var(X+Y) = 4\Big(Var(X) + Var(Y) - 2Cov(X,Y)\Big)$$

Para esto nos falta ver $E(X^2)$ (dado que $Var(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2$ y $Var(X) = Var(Y)$):

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_0^1 x^2\Big(x + \frac{1}{2}\Big)dx = \Big(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{6}\Big|_{x=0}^{1}\Big) = \frac{5}{12}$$

Así

$$Var(X) = \frac{5}{12} - \Big(\frac{7}{12}\Big)^2 = \frac{60-49}{144} = \frac{11}{144}$$

Con todo esto tenemos que:

$$Var(P) = 4\Big(\frac{22}{144} + 2\frac{1}{144}\Big) = 4\frac{24}{144} = \frac{2}{3}$$

c.- Tenemos que el área de un rectángulo se calcula multiplicando lado por lado. Entonces el valor esperado del área es $\mathbb{E}(XY) = 1/3$ (este fue calculado en la pregunta 1a). Queremos integrar $f_{X,Y}(x,y)$ sobre

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1,\ xy \geq \frac{1}{3}\Big\}$$

Consideraremos el siguiente cambio de variable:

$$\begin{aligned} u = 3xy &\quad \to x = \frac{u}{v} \\ v = 3y &\quad \to y = \frac{v}{3} \end{aligned}$$

Ahora calculemos el Jacobiano, con esto:

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{1}{u} & -\frac{1}{v^2} \\ 0 & \frac{1}{3} \end{vmatrix} = \frac{1}{3v}$$

Así tenemos que

$$dx\ dy = \frac{1}{3v} du\ dv$$

Con todo estos nuestra área de integración queda :

$$D = \Big\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x \leq 1,\ 0 < y \leq 1,\ 3xy \geq 1\Big\}$$

$$\Rightarrow \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < \frac{u}{v} \leq 1,\ 0 < \frac{v}{3} \leq 1,\ u \geq 1\Big\}$$

$$\Rightarrow \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 0 < u \leq v,\ 0 < v \leq 3,\ u \geq 1\Big\}$$

$$\Rightarrow D' = \Big\{(u,v) \in \mathbb{R}^2 : 1 < u \leq v,\ 1 < v \leq 3\Big\}$$

Así

$$\mathbb{P}(XY > 1/3) = \int\int_D (x+y)dy\ dx = \int_1^3 \int_1^v \Big(\frac{u}{v} + \frac{v}{3}\Big)\frac{1}{3v} du\ dv$$

$$= \int_1^3 \Big(\frac{u^2}{6v^2} + \frac{u}{9}\Big|_{u=1}^{v}\Big)dv = \int_1^3 \Big(\frac{1}{18} + \frac{v}{9} - \frac{1}{6v^2}\Big)dv$$

$$= \Big(\frac{v^2}{18} + \frac{v}{18} + \frac{1}{6v}\ \Big|_1^3\Big) = \frac{4}{9}$$

Así tenemos que la probabilidad de que el área de la placa sea mayor a su promedio es de $4/9$.

3. Sean X e Y variables aleatorias con función función generadora de momentos conjunta dada por

$$M_{X,Y}(t,s) = e^{\frac{1}{2}(t^2+2\rho ts+s^2)}, \quad (t,s) \in \mathbb{R}^2,$$

donde $|\rho| < 1$. Considere las variables aleatorias $U = X + Y$ y $V = X - Y$.

a) Calcule $\text{Cov}(X, Y)$.

b) Calcule $\text{Cov}(U, V)$.

c) Demuestre que U y V son independientes.

Respuesta:

a.- Tenemos que

$$M_X(t) = M_{X,Y}(t,0) = e^{\frac{1}{2}t^2} \quad y \quad M_Y(s) = M_{X,Y}(0,s) = e^{\frac{1}{2}s^2}$$

Podemos notar que las funciones generadoras de momentos de X e Y son iguales, por lo tanto, X e Y tienen la misma distribución y, por lo tanto, la misma esperanza y varianza. Con esto tenemos que:

$$\mathbb{E}(X) = \mathbb{E}(Y) = \Big(\frac{\partial M_X(t)}{\partial t}\Big|_{t=0}\Big) = te^{\frac{1}{2}t^2}\Big|_{t=0} = 0$$

Además tenemos que:

$$\mathbb{E}(XY) = \Big(\frac{\partial^2 M_{X,Y}(t,s)}{\partial s\ \partial t}\Big|_{t=0,\ s=0}\Big) = \big((t+\rho s)(s+\rho t)+\rho\big)\cdot e^{\frac{1}{2}(t^2-2\rho ts+s^2)}\Big|_{t=0,\ s=0} = \rho$$

Con esto tenemos que

$$Cov(X,Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) = \rho$$

b.- Sabemos que:

$$Cov(U,V) = \mathbb{E}(UV) - \mathbb{E}(U)\mathbb{E}(V) = \mathbb{E}(\ (X+Y)(X-Y)\ ) - \mathbb{E}(X+Y)\mathbb{E}(X-Y)$$

$$= \mathbb{E}(X^2 - Y^2) - \Big(\mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\Big)\Big(\mathbb{E}(X) - \mathbb{E}(Y)\Big)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(Y^2) - \Big(\mathbb{E}(X)^2 - \mathbb{E}(X)^2\Big)$$

$$= \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 - \Big(\mathbb{E}(Y^2) - \mathbb{E}(Y)^2\Big)$$

$$= Var(X) - Var(Y) = 0$$

Esto ocurre dado que sabemos que X distribuye igual que Y y por lo tanto tenemos que $Var(X) = Var(Y)$.

c.- Tenemos que $U = X + Y$ y $V = X - Y$, veamos las funciones generadoras de momentos de U y de V:

$$M_U(t) = \mathbb{E}(e^{tU}) = \mathbb{E}(e^{t(X+Y)}) = \mathbb{E}(e^{tX+tY}) = M_{X,Y}(t,t) = e^{\frac{1}{2}(t^2+2\rho t^2+t^2)} = e^{t^2(1+\rho)}$$

$$M_V(s) = \mathbb{E}(e^{tV}) = \mathbb{E}(e^{s(X-Y)}) = \mathbb{E}(e^{sX-sY}) = M_{X,Y}(s,-s) = e^{\frac{1}{2}(s^2-2\rho s^2+s^2)} = e^{s^2(1-\rho)}$$

Ahora veamos la función generadora de momentos de $\{U, V\}$

$$M_{U,V}(t,s) = \mathbb{E}(e^{tU+sV}) = \mathbb{E}(e^{t(X+Y)+s(X-Y)}) = \mathbb{E}(e^{(t+s)X+(t-s)Y})$$

$$= M_{X,Y}(t+s, t-s) = \exp\left\{\frac{1}{2}\Big((t+s)^2 + 2\rho(t+s)(t-s) + (t-s)^2\Big)\right\}$$

$$= \exp\left\{\frac{1}{2}\Big((t^2+2ts+s^2) - 2\rho(t^2-s^2) + (t^2-2ts+s^2)\Big)\right\}$$

$$= \exp\Big\{t^2(1+\rho) + s^2(1-\rho)\Big\}$$

$$= \exp\Big\{t^2(1+\rho)\Big\}\exp\Big\{s^2(1-\rho)\Big\}$$

$$= M_U(t) \cdot M_V(s)$$

Como tenemos que $M_{U,V}(t,s) = M_U(t) \cdot M_V(s)$ tenemos que U y V son independientes.