

Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad de Matemáticas / Departamento de Estadística

EYP 1026: Modelos Probabilísticos
I2

Profesor: Reinaldo Arellano.
Ayudante: Claudio Alarcón.

Segundo semestre 2019

1. Sean A_1, A_2, A_3 eventos definidos sobre un mismo espacio de probabilidad. Demuestre los siguientes resultados:

   i) Si $A_1 \cap A_2 = \emptyset$, entonces $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \mid A_3) = \mathbb{P}(A_1 \mid A_3) + \mathbb{P}(A_2 \mid A_3)$.

   ii) Si A_1, A_2 y A_3 son independientes, entonces también los son A_1^c, A_2^c y A_3^c.

2. Suponga que se lanzan dos dados (honestos) distinguibles (1 y 2).

   i) Analice si los siguientes eventos son independientes:
   $A_1 =$ *El resultado del dado 1 es un número impar*,
   $A_2 =$ *El resultado del dado 2 es un número impar*,
   $A_3 =$ *El resultado de ambos dados es el mismo.*

   ii) Calcule $\mathbb{P}(A_3 \mid A_1 \cap A_2)$, $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3)$ y $\mathbb{P}(A_1 \cup A_2 \cup A_3^c)$.

3. Sea $B_1, B_2, \ldots$ una particíon del espacio muestral de un modelo de probalidad $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Asuma que $P(B_n) > 0$ para todo n.

   i) Demuestre que para cualquier evento $A \in \mathcal{A}$, se tiene que

   $$P(A) = \sum_{n=1}^{\infty} P(A|B_n)P(B_n).$$

   ii) Suponga que la primera falla de una máquina durante la n-ésima hora de operación ocurre con probabilidad $(0{,}5)^n$. Si la primera falla de la máquina ocurre durante la n-ésima hora de operación, ella es reparada dentro de tres horas con probabilidad $0{,}3+(0{,}6)^n$. Sea A el evento de que la primera falla de la máquina sea reparada dentro de 3 horas. Calcule $P(A)$.

   Nota: Si $0 < q < 1$, *entonces* $\sum_{x=1}^{\infty} q^{x-1} = \frac{1}{1-q}$.

4. Se dispone de $n+1$ urnas numeradas del 0 al n, cada una de ellas con n bolitas. La k-ésima urna contiene k bolitas blancas y $n-k$ bolitas negras.

i) Se elige una urna al azar, y de ella se extrae aleatoriamente una bolita. Calcule la probabilidad de que la bolita extraída sea blanca.

ii) Si bolita obtenida en i) fue blanca, calcule la probabilidad (en términos de k y n) de que ella provenga de la k-ésima urna.

Notas:
1) Todas las preguntas tienen el mismo puntaje.
2) Ud. deber argumentar todos sus cálculos en cada pregunta para obtener el puntaje completo.
3) La prueba dura 2:15 horas.