I2- 2018-2

1.- Considere la siguiente función:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{cx^2}, \text{ si } 1 < x < \infty, \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

donde $c > 0$ es una constante.

a.- Indique el valor de c tal que $f(x)$ sea una función de densidad.

b.- Sea X la variable aleatoria asociada. Obtenga la FDA de X.

c.-Calcule $P([X] = k)$ para k=1,2,..., donde

$$y = [x] = \{y : y \in \mathbb{Z},\ x \in \mathbb{R},\ y \leq x < y + 1\}$$

d.- Discuta sobre la existencia de $E(X)$ y $E([X])$.

2.- Sea X una variable aleatoria no-negativa tal que $\log(X) \sim Normal(0, 1)$. Calcule:

a.- Pruebe que $F_X(x) = \Phi(\log(x))$.

b.- Calcule $P(X > 1)$.

c.- Pruebe que $E(X^k) = e^{k^2/2}$.

d.- Calcule $E(X)$ y $Var(X)$

3.- Sea X una variable aleatoria con función de densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} 1 - |x|, \text{ si } |x| < 1 \\ 0, \text{ en otro caso} \end{cases}$$

Indique si alguna de las siguientes arfimaciones es verdadera. Justifique sus respuestas dando argumentos sólidos.

a.- X y $-X$ tienen la misma distribución.

b.- $P(X > 0) = \frac{1}{2}$.

c.-$E(X) = 0$.

d.- $Var(X) = E(X^2)$.

Formulas:

$\cdot Z \sim Normal(\mu, \sigma^2) \Rightarrow f_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2}, z \in \mathbb{R}$

$\cdot F_Z(z) = \mathbf{\Phi}(x) = \int_{-\infty}^{z} \phi(t)dt, \text{ con } \phi(z) = (2\pi)^{-1/2} e^{-z^2/2}, z \in \mathbb{R}$