Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemática
Departamento De Estadística
Primer Semestre 2018

EYP1026 - Modelos Probabilísticos
Ayudantía 7

Profesor: Manuel Galea
Ayudante: Esteban Gutiérrez

1. Sea $X \sim \text{Poisson}(\lambda)$ con $\lambda > 0$. Calcule la función característica de X.

2. Suponga que $f_X(x)$ es una densidad para una variable aleatoria X. Asuma que f_X es una función par y pruebe que

   (a) X y $-X$ son idénticamente distribuidas.

   (b) M_X es también par.

3. Diremos que X es una variable aleatoria con distribución binomial negativa de parámetros $p \in (0,1)$ y $r \in \mathbb{N}$ si

$$P(X = x) = \binom{r+x-1}{x} p^r (1-p)^x,$$

   para $x \in \mathbb{N}_0$, y lo denotaremos $X \sim \text{BN}(r,p)$.
   Diremos que Y es una variable aleatoria con distribución χ^2 de parámetro $r > 0$ si admite densidad

$$f_Y(y) = \frac{(1/2)^{r/2}}{\Gamma(r/2)} y^{r/2-1} e^{-y/2},$$

   donde $y \geq 0$ y

$$\Gamma(r) = \int_0^\infty u^{r-1} e^{-u} du.$$

   En este caso, diremos que $Y \sim \chi^2(r)$.

   (a) Sea $X \sim BN(r,p)$. Calcule M_X.

   (b) Sea $Y \sim \chi^2(r)$. Calcule M_Y.

   (c) Sean $X \sim BN(r,p)$ e $Y \sim \chi^2(2r)$. Defina la variable aleatoria $Z_p = 2pX$ y muestre que

$$\lim_{p \to 0^+} M_{Z_p}(t) = \left(\frac{1}{1-2t}\right)^r = M_Y(t),$$

   para $|t| < 1/2$. ¿Qué puede concluir a partir de esto?

4. Sea X una variable aleatoria con $M_X(t)$ definida en $|t| < h$. Pruebe que

   (a) $P(X \geq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (0,h)$.

   (b) $P(X \leq a) \leq e^{-at} M_X(t)$, para $t \in (-h,0)$.