Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemática
Departamento De Estadística
Primer Semestre 2018

EYP1026 - Modelos Probabilísticos
Ayudantía 6

Profesor: Manuel Galea
Ayudante: Esteban Gutiérrez

1. Sea X una variable aleatoria continua con soporte en $\mathbb{R}^+$. Muestre que

$$E(X) = \int_0^\infty 1 - F_X(x)\ dx.$$

2. Una función $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice convexa si para todo par $x, y \in \mathbb{R}$ y $t \in (0, 1)$ se tiene que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y).$$

Una función f se dice cóncava si $-f$ es convexa.
Sea X una variable aleatoria con esperanza finita.

   (a) Muestre que si f es convexa, entonces

$$f(E(X)) \leq E(f(X)).$$

   (b) Muestre que si f es cóncava, entonces

$$f(E(X)) \geq E(f(X)).$$

3. Sea X una variable aleatoria con soporte en $\mathbb{R}^+$ y $g : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ una función positiva y creciente. Muestre que para todo $a > 0$

$$P(X \geq a) \leq \frac{E(g(X))}{g(a)}.$$

4. Sea X una variable aleatoria continua con esperanza finita y defina $M(t) = E(|X - t|)$.

   (a) Pruebe que $M(t) \in C^1(\mathbb{R})$.

   (b) Use la pregunta 2 para ver que $M(t)$ no es acotada.

   (c) Determine los puntos críticos de $M(t)$. Si m es un punto crítico de $M(t)$, diremos que m es una mediana de X.

   (d) Muestre que el conjunto de medianas de X es un intervalo.

   (e) Concluya que si m es una mediana de X, entonces para todo $t \in \mathbb{R}$

$$E(|X - m|) \leq E(|X - t|).$$