Pontificia Universidad Católica De Chile
Facultad De Matemática
Departamento De Estadística
Primer Semestre 2018

EYP1026 - Modelos Probabilísticos
Ayudantía 10

Profesor: Manuel Galea
Ayudante: Esteban Gutiérrez

1. Sean X una variable aleatoria discreta e Y una variable aletoria continua. Suponga que el vector aleatorio $V = (X\ ,\ Y)$ admite densidad mixta

$$p_{X,Y}(x,y) = \frac{y^x e^{-2y}}{x!} \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{N}_0 \times \mathbb{R}^+}(x,y).$$

   Calcule las densidades marginales de las variables X e Y.

2. Sean $\mathbb{D} = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ y $V = (X\ ,\ Y) \sim Unif(\mathbb{D})$. Calcule las densidades marginales de las variables X e Y. ¿Son X e Y independientes?

3. Considere X, Y variables aleatorias *iid* con distribución $N(0,1)$.

   (a) Determine una densidad para $V = (X + Y\ ,\ X - Y)$.

   (b) Pruebe que $X + Y$ y $X - Y$ son variables aleatorias *iid* con distribución $N(0, \sqrt{2})$.

4. Sean X, Y variables independientes con densidades f_X y f_Y respectivamente. Pruebe que

$$f_{X+Y}(x) = f_X * f_Y(x) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x-y) f_Y(y) dy,$$

   es una densidad para $X + Y$. Para eso siga los siguientes pasos:

   (a) Calcule una densidad para el vector aleatorio $W = (X + Y, Y)$.

   (b) Calcule una densidad marginal para la primera coordenada de W.

5. Sean X e Y variables aleatorias *iid* con distribución $Unif(0,1)$. Defina las variables

$$R = \sqrt{2 \log \frac{1}{1-x}},$$
$$\Theta = \pi(2Y - 1).$$

   (a) Determine las distribuciones de R y Θ y note que son independientes.

   (b) Sean $Z = Rcos(\Theta)$ y $W = Rsen(\Theta)$. Determine una densidad para $(Z\ ,\ W)$.

   (c) Concluya que Z y W son variables *iid* con distribución $N(0,1)$.