PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

INTERROGACIÓN 3 - PAUTA
Modelos Probabilísticos - EYP1026

Profesor	:	Anita Araneda
Ayudante	:	Daniel Saavedra
Fecha	:	9 de noviembre de 2017

1. Sea X una variable aleatoria con distribución Doble Exponencial, cuya función densidad de probabilidad está dada por:

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x|\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

a) Encuentre la función generadora de momentos de X y, en base a ella, obtenga $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$.

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \mathrm{E}(e^{tX}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx}\frac{1}{2}e^{-|x|}\,dx \qquad \textbf{[0,3]} \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{x(t+1)}\,dx + \int_{0}^{\infty} e^{x(t-1)}\,dx\right\}. \qquad \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

Para que ambas integrales existan se deben cumplir $t+1 > 0$ y $t-1 < 0$, es decir, $-1 < t < 1$ **[0,3]**. En ese caso:

$$\begin{aligned} M_X(t) &= \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{e^{x(t+1)}}{t+1}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{x(t-1)}}{t-1}\right|_{0}^{\infty}\right\} \\ &= \frac{1}{1-t^2}. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Para encontrar $\mathrm{E}(X)$ y $\mathrm{Var}(X)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(X) &= \left.\frac{dM_X(t)}{dt}\right|_{t=0} = \left.\frac{2t}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} = 0 \qquad \textbf{[1,0]} \\ \mathrm{Var}(X) = \mathrm{E}(X^2) &= \left.\frac{d^2M_X(t)}{dt^2}\right|_{t=0} \\ &= \left.\frac{2(1-t^2)^2 + 8t^2(1-t^2)}{(1-t^2)^2}\right|_{t=0} = 2. \qquad \textbf{[1,0]} \end{aligned}$$

b) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, ambas con distribución Doble Exponencial. Encuentre la función generadora de momentos de $Y = |X_1| + |X_2|$.

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathrm{E}(e^{tY}) = \mathrm{E}(e^{t|X_1|+t|X_2|}) \\ &= \mathrm{E}(e^{t|X_1|})\mathrm{E}(e^{t|X_2|}) \qquad \text{por independencia} \\ &= M_{|X_1|}(t)\, M_{|X_2|}(t) = \left(M_{|X_1|}(t)\right)^2, \qquad \textbf{[1,0]} \end{aligned}$$

pues $|X_1|$ y $|X_2|$ tienen la misma distribución. Por otra parte,

$$\begin{aligned} M_{|X_1|}(t) &= \mathrm{E}(e^{t|X_1|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t|u|}\frac{1}{2}e^{-|u|}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{u(1-t)}\, du + \int_{0}^{\infty} e^{u(t-1)}\, du\right\}. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Para que ambas integrales existan, se debe cumplir que $t < 1$. **[0,3]** En ese caso:

$$\begin{aligned} M_{|X_1|}(t) &= \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{e^{u(1-t)}}{1-t}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{u(t-1)}}{t-1}\right|_{0}^{\infty}\right\} \\ &= \frac{1}{1-t}. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Luego,

$$M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2. \qquad \textbf{[0,3]}$$

[1,0] punto base

2. *a*) Sean $X_0, X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, todas con la misma varianza, $\sigma^2 > 0$. Sea $Y_j = X_j - X_{j-1}$, $j = 1, \ldots, n$, y sea $\bar{Y} = \sum_{i=1}^{n} Y_i/n$. Determine la varianza de $\bar{Y}$.

Solución: Se tiene:

$$\begin{aligned} Y_1 &= X_1 - X_0 \\ Y_2 &= X_2 - X_1 \\ Y_3 &= X_3 - X_2 \\ \vdots &\quad \vdots \\ Y_n &= X_n - X_{n-1}. \end{aligned}$$

Luego,

$$\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} Y_j = \frac{1}{n}(X_n - X_0), \qquad \textbf{[1,0]}$$

y

$$\mathrm{Var}(\bar{Y}) = \frac{1}{n^2}(\mathrm{Var}(X_n) + \mathrm{Var}(X_0)) = \frac{2\sigma^2}{n^2}. \qquad \textbf{[1,0]}$$

b) Sean X e Y variables aleatorias con varianzas σ_X^2 y σ_Y^2, respectivamente, ambas mayores que cero. Utilice que:

$$\text{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}\right)\geq 0 \qquad \text{y que} \qquad \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right)\geq 0$$

para demostrar que $|\rho_{X,Y}| \leq 1$, donde $\rho_{X,Y}$ corresponde al coeficiente de correlación entre X e Y.

Solución: Tomamos primero:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X}+\frac{Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\sigma_X^2}+\frac{\text{Var}(Y)}{\sigma_Y^2}+2\,\text{Cov}\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2}+\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2}+2\,\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\text{Cov}\,(X,Y) \\ &= 2+2\,\rho_{X,Y}, \end{aligned}$$

de donde

$$\rho_{X,Y}\geq -1. \qquad \textbf{[1,0]} \tag{1}$$

Del mismo modo:

$$\begin{aligned} 0 &\leq \text{Var}\left(\frac{X}{\sigma_X}-\frac{Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{\text{Var}(X)}{\sigma_X^2}+\frac{\text{Var}(Y)}{\sigma_Y^2}-2\,\text{Cov}\left(\frac{X}{\sigma_X},\frac{Y}{\sigma_Y}\right) \\ &= \frac{\sigma_X^2}{\sigma_X^2}+\frac{\sigma_Y^2}{\sigma_Y^2}-2\,\frac{1}{\sigma_X\sigma_Y}\text{Cov}\,(X,Y) \\ &= 2-2\,\rho_{X,Y}, \end{aligned}$$

de donde

$$\rho_{X,Y}\leq 1. \qquad \textbf{[1,0]} \tag{2}$$

Las ecuaciones (1) y (2) aseguran que $|\rho_{X,Y}| \leq 1$.

c) Sean $X_1,\ldots,X_n$ variables aleatorias con la misma varianza, σ^2, y tales que todos los coeficientes de correlación de pares de ellas son iguales a ρ. Demuestre que:

$$\rho \geq -\frac{1}{n-1}.$$

Solución: Sabemos que:

$$0 \leq \text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\text{Cov}(X_i,X_j).$$

Por otra parte,

$$\rho = \frac{\text{Cov}(X_i, X_j)}{\sigma \cdot \sigma},$$

luego:

$$\begin{aligned} 0 &\leq n\sigma^2 + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \rho\, \sigma^2 \\ &= n\sigma^2 + 2\frac{n(n-1)}{2}\, \rho\, \sigma^2 \\ &= n\sigma^2 + n(n-1)\, \rho\, \sigma^2 \end{aligned}$$

Dado que $n\sigma^2 \geq 0$:

$$\begin{aligned} & 0 \leq 1 + (n-1)\, \rho \\ \iff \qquad & \rho \geq -\frac{1}{n-1}. \end{aligned}$$ **[2,0]**

[1,0] punto base

3. *a*) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias. Demuestre que:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) = \sum_{i=1}^{n} \text{Var}(X_i) + 2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i} \text{Cov}(X_i, X_j).$$

Puede utilizar resultados demostrados en clases o en ayudantías.

Solución: Sabemos que, si A es una matriz de dimensiones $m \times n$, $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)^T$ un vector aleatorio, e $\mathbf{Y} = A\ \mathbf{X}$,

$$\text{Var}(\mathbf{Y}) = A\ \text{Var}(\mathbf{X})\ A^T.$$

En este caso, tomamos A, de dimensiones $1 \times n$, $A = (1, \ldots, 1)$. De modo que

$$Y = A\ \mathbf{X} = \sum_{i=1}^{n} X_i.$$

Luego,

$$\begin{aligned}
&\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right) \\
= \quad & (1,\ldots,1)\begin{pmatrix} \text{Var}(X_1) & \text{Cov}(X_1,X_2) & \ldots & \text{Cov}(X_1,X_n) \\ \text{Cov}(X_2,X_1) & \text{Var}(X_2) & \ldots & \text{Cov}(X_2,X_n) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \text{Cov}(X_n,X_1) & \text{Cov}(X_n,X_2) & \ldots & \text{Var}(X_n) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
= \quad & \left(\text{Var}(X_1)+\sum_{j=2}^{n}\text{Cov}(X_j,X_1),\ldots,\text{Var}(X_n)+\sum_{j=1}^{n-1}\text{Cov}(X_j,X_n)\right)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \\
= \quad & \sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j\neq i}\text{Cov}(X_j,X_i).
\end{aligned}$$

Dado que $\text{Cov}(X_i,X_j)=\text{Cov}(X_j,X_i)$:

$$\text{Var}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)=\sum_{i=1}^{n}\text{Var}(X_i)+2\sum_{i=1}^{n}\sum_{j>i}\text{Cov}(X_i,X_j). \qquad \textbf{[3,0]}$$

b) Sea el vector aleatorio

$$\mathbf{X}=\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{pmatrix},$$

con $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ vectores aleatorios de dimensiones n_1 y n_2, respectivamente. Demuestre que, para todo $\mathbf{t}_1\in\mathbb{R}^{n_1}$ y $\mathbf{0}\in\mathbb{R}^{n_2}$:

$$\varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1) \quad = \quad \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t_1},\mathbf{0}).$$

Solución: Sea $\mathbf{t}\in\mathbb{R}^n$, con $n=n_1+n_2$:

$$\mathbf{t}=\begin{pmatrix}\mathbf{t}_1\\ \mathbf{t}_2\end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}_1=\begin{pmatrix}t_1\\ \vdots\\ t_{n_1}\end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}_2=\begin{pmatrix}t_{n_1+1}\\ \vdots\\ t_n\end{pmatrix},$$

luego,

$$\mathbf{t}^T\mathbf{X}=(\mathbf{t}_1^T,\ \mathbf{t}_2^T)\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \mathbf{X}_2\end{pmatrix}=\mathbf{t}_1^T\mathbf{X}_1+\mathbf{t}_2^T\mathbf{X}_2. \qquad \textbf{[1,0]}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \text{E}\left(e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right) \\
&= \text{E}\left(e^{i(\mathbf{t}_1^T\mathbf{X}_1+\mathbf{t}_2^T\mathbf{X}_2)}\right). \qquad \textbf{[1,0]}
\end{aligned}$$

Si tomamos $\mathbf{t}_2 = \mathbf{0}$,

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_1, \mathbf{0}) \quad = \quad \mathrm{E}\left(e^{i\mathbf{t}_1^T \mathbf{X}_1}\right) = \varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1), \qquad \textbf{[1,0]}$$

que es lo que se pedía demostrar.

[1,0] punto base