PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

INTERROGACIÓN 2
Modelos Probabilísticos - EYP1026

Profesor	:	Anita Araneda
Ayudante	:	Daniel Saavedra
Fecha	:	10 de octubre de 2017

1. Para una misma persona, el puntaje en una prueba de aptitud matemática, X, es un valor entre 0 y 1, y lo mismo ocurre con el puntaje en una prueba de aptitud musical, Y. En una población dada, la función densidad de probabilidad conjunta de estos puntajes está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) \begin{cases} \frac{2}{5}(2x+3y) & ,(x,y) \in [0,1]\times[0,1] \\ 0 & ,(x,y) \notin [0,1]\times[0,1]. \end{cases}$$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una persona extraída de manera aleatoria a partir de esta población obtenga un puntaje mayor a 0,8 en la prueba de aptitud matemática?

Solución: Se pide $P(X > 0,8)$. Previamente obtenemos $f_X(x)$. Para $0 < x < 1$ se tiene:

$$\begin{aligned} f_X(x) &= \int_0^1 f_{X,Y}(x,y)\, dy \\ &= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x+3y)\, dy \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= \frac{2}{5}\left[2x + 3\frac{y^2}{2}\Big|_0^1\right] \\ &= \frac{2}{5}\left(2x+\frac{3}{2}\right) = \frac{4}{5}x + \frac{3}{5}. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

La probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(X > 0,8) &= \int_{0,8}^1 f_X(x)\, dx \\ &= \int_{0,8}^1 \left(\frac{4}{5}x + \frac{3}{5}\right) dx \qquad \textbf{[0,5]} \\ &= \frac{4}{5}\frac{x^2}{2}\Big|_{0,8}^1 + \frac{3}{5}(1-0,8) \\ &= \frac{2}{5}(1-0,8^2) + \frac{3}{5}\cdot 0,2. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

b) Si el puntaje de esta persona en la prueba de aptitud musical es 0,3, ¿cuál es la probabilidad de que su puntaje en la prueba de aptitud matemática se mayor a 0,8?

Solución: Se pide $P(X > 0,8|Y = 0,3)$. Previamente obtenemos:

$$f_{X|Y}(x|0.3) = \frac{f_{X,Y}(x, 0.3)}{f_Y(0,3)}.$$

Para el denominador, con $0 < y < 1$:

$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_0^1 \frac{2}{5}(2x + 3y)\, dx \\ &= \frac{2}{5}\left[2\frac{x^2}{2}\Big|_0^1 + 3y \right] \\ &= \frac{2}{5}(1 + 3y). \qquad \textbf{[1,0]} \end{aligned}$$

En nuestro caso, se requiere $f_Y(0,3) = 2/5 \times 1,9$. Luego,

$$f_{X|Y}(x|0.3) = \frac{(2/5)\ (2x + 0,9)}{(2/5)\ 1,9} = \frac{2x + 0,9}{1,9} \qquad \textbf{[1,2]}$$

y con esto, la probabilidad pedida corresponde a:

$$\begin{aligned} P(X > 0,8|0,3) &= \int_{0,8}^1 f_{X|Y}(x|0.3)\, dx \\ &= \frac{1}{1,9}\int_{0,8}^1 (2x + 0,9)\, dx \qquad \textbf{[1,2]} \\ &= \frac{1}{1,9}\left(x^2|_{0,8}^1 + 0,9(1 - 0,8) \right) \\ &= \frac{1}{1,9}\left((1 - 0,8^2) + 0,9 \cdot 0,2 \right). \qquad \textbf{[0,4]} \end{aligned}$$

[1,0] punto base

2. Sean X_1 y X_2 variables aleatorias independientes con distribuciones Gama(α_i, λ), $i = 1, 2$, respectivamente. Obtenga la función densidad de probabilidad conjunta de $Y_1 = X_1/(X_1+X_2)$ e $Y_2 = X_2$, y utilícela para mostrar que Y_1 sigue una distribución Beta(α_1, α_2).

Ayuda: La función densidad de la distribución Gama(α, λ) está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\lambda^\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp\{-\lambda\, x\} & , x > 0 \\ 0 & , x \leq 0. \end{cases}$$

La función densidad de la distribución Beta(α, β) está dada por

$$f(x) = \begin{cases} \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)} x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} & , x \in (0,1) \\ 0 & , x \notin (0,1). \end{cases}$$

Solución: La transformación corresponde a:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \xrightarrow{g} \begin{pmatrix} Y_1 \\ Y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{X_1}{X_1+X_2} \\ X_2 \end{pmatrix}.$$

Esta transformación es invertible, con:

$$g^{-1}(y_1, y_2) = (x_1, x_2) = \left(\frac{y_1\, y_2}{1-y_1}, y_2\right). \qquad \textbf{[0,5]}$$

El Jacobiano de la transformación corresponde a:

$$J = \begin{pmatrix} \frac{y_2}{(1-y_1)^2} & \frac{y_1}{(1-y_1)} \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad \textbf{[1,0]}$$

y el valor absoluto de su determinante corresponde a:

$$|\det J| = \frac{y_2}{(1-y_1)^2}, \qquad \textbf{[0,5]}$$

ya que $y_2 = x_2 > 0$ **[0,2]**. Por otra parte, la función densidad de probabilidad conjunta de X_1 y X_2 corresponde a:

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} x_1^{\alpha_1-1} x_2^{\alpha_2-1} \exp\{-\lambda(x_1+x_2)\},$$

cuando $(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$, y cero en otro caso. Luego, la función densidad de probabilidad conjunta de (Y_1, Y_2) corresponde a:

$$\begin{aligned} f_{Y_1,Y_2}(y_1, y_2) &= \frac{y_2}{(1-y_1)^2} \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \left(\frac{y_1\, y_2}{1-y_1}\right)^{\alpha_1-1} y_2^{\alpha_2-1} \exp\left\{-\lambda\left(\frac{y_1\, y_2}{1-y_1} + y_2\right)\right\} \\ &= \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{y_1^{\alpha_1-1}}{(1-y_1)^{\alpha_1+1}} y_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} \exp\left\{-\lambda\frac{y_2}{1-y_1}\right\}, \qquad \textbf{[1,0]} \end{aligned}$$

con $(y_1, y_2) \in (0,1) \times \mathbb{R}^+$ **[0,3]**. Para obtener la densidad de probabilidad marginal de Y_1:

$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\lambda^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} \frac{y_1^{\alpha_1-1}}{(1-y_1)^{\alpha_1+1}} \int_0^\infty y_2^{\alpha_1+\alpha_2-1} \exp\left\{-\lambda\frac{y_2}{1-y_1}\right\} dy_2. \qquad \textbf{[0,5]}$$

El término en y_2 dentro de la integral corresponde al kernel de una distribución Gama$(\alpha_1 + \alpha_2, \lambda/(1-y_1))$ cuya constante es:

$$\frac{\left(\frac{\lambda}{1-y_1}\right)^{\alpha_1+\alpha_2}}{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}.$$

Multiplicando y dividiendo la integral por esta constante se obtiene:

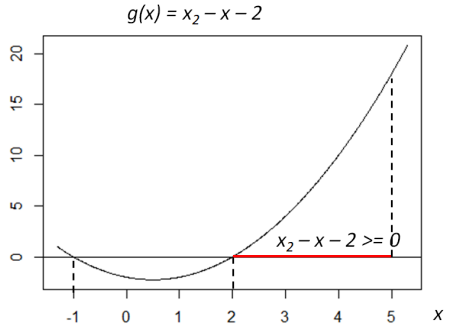
$$f_{Y_1}(y_1) = \frac{\Gamma(\alpha_1+\alpha_2)}{\Gamma(\alpha_1)\Gamma(\alpha_2)} y_1^{\alpha_1-1}(1-y_1)^{\alpha_2-1}, \qquad \textbf{[1,5]}$$

con $y_1 \in (0,1)$ **[0,2]**, lo que corresponde a la densidad de probabilidad de una distribución Beta(α_1, α_2). **[0,3]**

[1,0] punto base

3. *a*) Sea X una variable aleatoria Uniforme en el intervalo $(0, 5)$. Encuentre la probabilidad de que la ecuación en u dada por $4u^2 + 4uX + X + 2 = 0$ tenga raíces reales.

Solución: Para que la ecuación tenga raíces reales ses debe cumplir que $b^2 - 4ac \geq 0$, con $a = 4$, $b = 4X$, $c = (X + 2)$. Esto se traduce en: $X^2 - X - 2 \geq 0$ **[0,5]**. La función $g(x) = x^2 - x - 2$ corresponde a una parábola abierta hacia arriba, con vértice en $x = 1/2$, y que corta al eje x en $x = -1$ y $x = 2$ **[1,0]**, como muestra la figura.



Luego, $g(x) \geq 0$ en $(-\infty, -1] \cup [2, +\infty)$. Al intersectar con el soporte de X, $D_X = (0, 5)$, se obtiene que $X^2 - X - 2 \geq 0$ equivale a $X \in [2, 5)$ **[1,0]**. Luego, la probabilidad de que la ecuación original tenga raíces reales corresponde a:

$$P(X^2 - X - 2 \geq 0) \quad = \quad P(2 \leq X < 5) = \frac{5-2}{5-0} = \frac{3}{5}. \qquad \textbf{[0,5]}$$

Nota: Puede seguir razonamientos diferentes. En ese caso, la traducción de la condición original a $X \in [2, 5)$ lleva **[2,0]**

b) Sean $X_1, \ldots, X_n$ variables aleatorias independientes, cada una con función densidad de probabilidad común $f_X(x_i)$. Sabemos que la función densidad de probabilidad conjunta de los estadísticos de orden está dada por:

$$f_{X_{(1)},\ldots,X_{(n)}}(x_1, \ldots, x_n) = \begin{cases} n! \prod_{i=1}^n f_X(x_i) & , (x_1, \ldots, x_n) \in D_X^n \\ 0 & , (x_1, \ldots, x_n) \notin D_X^n, \end{cases}$$

Considere $n = 3$, y encuentre la función densidad de probabilidad conjunta de $X_{(1)}$ y $X_{(n)}$.

Solución: Para $n = 3$,

$$f_{X_{(1)},X_{(2)},X_{(3)}}(x_1, x_2, x_3) = \begin{cases} 3! \prod_{i=1}^3 f_X(x_i). & , (x_1, x_2, x_3) \in D_X^3 \\ 0 & , (x_1, x_2, x_3) \notin D_X^3. \end{cases}$$

Para obtener la función densidad de probabilidad de $(X_{(1)}, X_{(3)})$:

$$\begin{aligned} f_{X_{(1)},X_{(3)}}(x_1, x_3) &= 3! \int_{x_1}^{x_3} f_X(x_1) f_X(x_2) f_X(x_3)\, dx_2 \qquad \textbf{[1,0]} \\ &= 3! f_X(x_1) f_X(x_3) \int_{x_1}^{x_3} f_X(x_2)\, dx_2 \\ &= 3! f_X(x_1) f_X(x_3)(F_X(x_3) - F_X(x_2)), \qquad \textbf{[2,0]} \end{aligned}$$

cuando $(x_1, x_3) \in D_X^2$, cero en otro caso.

[1,0] punto base