PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

INTERROGACIÓN 1 - PAUTA
Modelos Probabilísticos - EYP1026

Profesor : Anita Araneda
Ayudante : Daniel Saavedra
Fecha : 7 de septiembre de 2017

1. *a*) Sea $\Omega = \{a, b, c, d\}$ y sean $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$. Se define la colección $C = \{A, B\}$. Encuentre $\sigma(C)$, el menor σ-álgebra que contiene a C. Justifique la inclusión de cada nuevo elemento a $\sigma(C)$.

   Solución: El σ-álgebra pedido es el conjunto potencia de Ω, con $2^4 = 16$ elementos. En efecto, deben pertenecer: i) Ω ii) todos los complementos iii) todas las uniones. De este modo, pertenecen:

   - $A = \{a, b\}$ y $B = \{b, c\}$, por definición de C. **[0.2]**
   - Ω, por condición de σ-álgebra, y $\emptyset$ por ser Ω^c **[0.2]**
   - $A^c = \{c, d\}$ y $B^c = \{a, d\}$ **[0.2]**
   - $A \cup B = \{a, b, c\}$, $(A \cup B)^c = \{d\}$ **[0.2]**
   - $A \cup B^c = \{a, b, d\}$, $(A \cup B^c)^c = \{c\}$ **[0.2]**
   - $A^c \cup B = \{b, c, d\}$, $(A^c \cup B)^c = \{a\}$ **[0.2]**
   - $A^c \cup (A^c \cup B)^c = \{a, c, d\}$, $(A^c \cup (A^c \cup B)^c)^c = \{b\}$ **[0.2]**
   - $(A \cup B^c)^c \cup (A^c \cup B)^c = \{a, c\}$, $((A \cup B^c)^c \cup (A^c \cup B)^c)^c = \{b, d\}$ **[0.2]**

   b) Sean $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ dos $\sigma-$álgebras definidos sobre un mismo espacio muestral, Ω. Demuestre que $\mathcal{F} = \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2$ también corresponde a un σ-álgebra. Justifique todas sus afirmaciones.

   Solución:

   1) Se debe demostrar $\Omega \in \mathcal{F}$. $\mathcal{F}_1$ y $\mathcal{F}_2$ son σ-álgebras, luego, $\Omega \in \mathcal{F}_1$ y $\Omega \in \mathcal{F}_2$. Luego, $\Omega \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. **[0.8]**
   2) Se debe demostrar que, para todo evento A, si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A^c \in \mathcal{F}$.
      Si $A \in \mathcal{F}$ entonces $A \in \mathcal{F}_1$ y $A \in \mathcal{F}_2$. Dado que $\mathcal{F}_1$ es σ-álgebra, $A^c \in \mathcal{F}_1$. Por el mismo argumento $A^c \in \mathcal{F}_2$. Luego, $A^c \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. **[0.8]**
   3) Se debe demostrar que, para toda secuencia numerable de eventos $A_1, A_2, \ldots$, si $A_i \in \mathcal{F}$ para todo $i = 1, 2, \ldots$, entonces $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}$.
      Si $A_i \in \mathcal{F}, \forall i$ entonces $A_i \in \mathcal{F}_1, \forall i$ y $A_i \in \mathcal{F}_2, \forall i$. Dado que $\mathcal{F}_1$ es σ-álgebra, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1$. Por el mismo argumento $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_2$. Luego, $\cup_{i=1}^{\infty} A_i \in \mathcal{F}_1 \cap \mathcal{F}_2 = \mathcal{F}$. **[0.8]**

   Luego, $\mathcal{F}$ es un σ-álgebra.

c) Utilizando los axiomas de probabilidad, demuestre que:

$P(A \cup B \cup C) = P(A)+P(B)+P(C)-P(A \cap B)-P(A \cap C)-P(B \cap C)+P(A \cap B \cap C)$.

Justifique todas sus afirmaciones.

Solución:

$$\begin{aligned} P(A \cup B \cup C) &= P((A \cup B) \cup C) = P(A \cup B) + P(C) - P((A \cup B) \cap C) \\ &= (P(A) + P(B) - P(A \cap B)) + P(C) - P((A \cap C) \cup (B \cap C)). \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - \\ &\quad [P(A \cap C) + P(B \cap C) - P((A \cap C) \cap (B \cap C))] \\ &= P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C). \end{aligned}$$

[2.0]

[1.0] punto base

2. Para una empresa de buses de pasajeros es importante mantener una buena frecuencia del servicio. El tiempo de recorrido X de un bus, medido en minutos, desde su salida del terminal hasta su regreso a él, tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}(x-120)} & , x > 120 \\ 0 & , x \leq 120. \end{cases}$$

a) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en menos de t minutos, $t \in \mathbb{R}$.

Solución: Si $t > 120$:

$$\begin{aligned} P(X < t) &= \int_{120}^{t} \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}(x-120)}\, dx \\ &= \int_{0}^{t-120} \frac{1}{30}e^{-\frac{1}{30}u}\, du \\ &= -e^{-\frac{1}{30}u}\Big|_0^{t-120} \\ &= 1 - e^{-\frac{1}{30}(t-120)}. \qquad \textbf{[1,5]} \end{aligned}$$

Si $t \leq 120$, $P(X < t) = 0$. **[0,5]**

b) Determine la probabilidad que un conductor realice el recorrido en más de 3 horas.

Solución: Se pide:

$$P(X > 180) = 1 - P(X \leq 180) = e^{-\frac{1}{30}(180-120)} = e^{-2}. \qquad \textbf{[1,0]}$$

c) Un bus inicia su recorrido y tres horas despues aún no ha llegado a su destino. Calcule la probabilidad que el bus se demore a lo menos 15 minutos adicionales.

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned} P(X > 195|X > 180) &= \frac{P((X > 195) \cap (X > 180))}{P(X > 180)} \\ &= \frac{P(X > 195)}{P(X > 180)} \qquad \textbf{[1,5]} \\ &= \frac{e^{-\frac{1}{30}(195-120)}}{e^{-\frac{1}{30}(180-120)}} \\ &= e^{-1/2}. \qquad \textbf{[1,5]} \end{aligned}$$

[1,0] punto base

3. Suponga que (X, Y) es un vector aleatorio absolutamente continuo, cuya función densidad de probabilidad conjunta está dada por:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} 6xy + 5y & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \notin D, \end{cases}$$

con $D = \{(x,y); 0 \leq y \leq x^2; 0 \leq x \leq 1\}$.

a) Encuentre la función densidad de probabilidad marginal de Y.

Solución: Se pide:

$$f_Y(y) = \int f_{XY}(x,y)\, dx.$$

Si $0 < y < 1$:

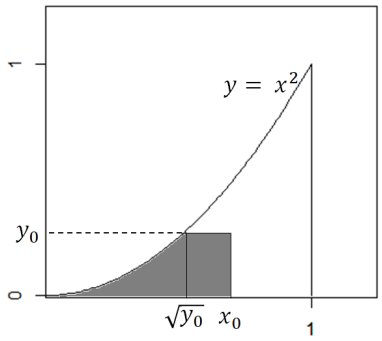
$$\begin{aligned} f_Y(y) &= \int_{\sqrt{y}}^{1} (6xy + 5y)\, dx \\ &= 6y\frac{x^2}{2}\Big|_{\sqrt{y}}^{1} + 5y(1 - \sqrt{y}) \\ &= 3y(1-y) + 5y(1-\sqrt{y}) \qquad \textbf{[1,5]} \end{aligned}$$

Si $y < 0$ o $y > 1$, $f_Y(y) = 0$. **[0,5]**

b) Obtenga la función de distribución acumulada $F_{X,Y}$ evaluada en un punto (x_0, y_0) cuando:
i) $(x_0, y_0) \in D$ ii) $0 \leq x_0 \leq 1, y_0 > x_0^2$ iii) $x_0 > 1, y_0 > 1$.

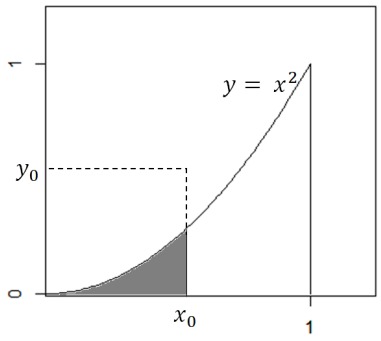
Solución:

i) Se pide el area en gris:



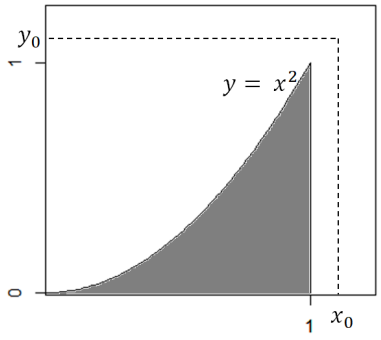
$$\begin{aligned} F_{XY}(x_0,y_0) &= P(X \leq x_0, Y \leq y_0) \\ &= \int_0^{\sqrt{y_0}} \int_0^{x^2} (6xy + 5y)\, dy\, dx + (x_0 - \sqrt{y_0})y_0. \qquad \textbf{[1,5]} \end{aligned}$$

ii) Se pide el area en gris:



$$F_{XY}(x_0, y_0) = \int_0^{x_0} \int_0^{x^2} (6xy + 5y)\, dy\, dx. \qquad \textbf{[1,5]}$$

ii) Se pide:



$$F_{XY}(x_0, y_0) = 1. \qquad \textbf{[1,0]}$$

[1,0] punto base