PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATÓLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMÁTICAS
DEPARTAMENTO DE ESTADÍSTICA

EXAMEN
Modelos Probabilísticos - EYP1026

Profesor	:	Anita Araneda
Ayudante	:	Daniel Saavedra
Fecha	:	27 de noviembre de 2017

1. Sea $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$ la función generadora de momentos de un vector aleatorio $\mathbf{X} = (X_1, X_2)^T$, con $\mathbf{t} = (t_1, t_2)^T \in \mathbb{R}^2$.

   a) Demuestre que:

   $$\mathrm{E}(X_1^m X_2^n) = \left. \frac{\partial^{m+n} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^m \, \partial t_2^n} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}},$$

   con $m, n \in \mathbb{N}$.

   Solución: Sin pérdida de generalidad, trabajaremos en el caso absolutamente continuo. Se tiene que:

   $$\begin{aligned} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}(e^{\mathbf{t}^T \mathbf{X}}) = \mathrm{E}(e^{t_1 X_1 + t_2 X_2}) \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}, \end{aligned}$$

   donde $f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x})$ corresponde a la función densidad de probabilidad del vector aleatorio $\mathbf{X}$. Veremos el patrón que siguen las derivadas parciales. Asumieremos que todas las integrales involucradas existen, de modo que es posible intercambiar derivadas por integrales.

   $$\begin{aligned} \frac{\partial M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 \, e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \frac{\partial^2 M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1 \partial t_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1 x_2 \, e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \frac{\partial^3 M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^2 \partial t_2} &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 x_2 \, e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ \frac{\partial^4 M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^2 \partial t_2^2} &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1^2 x_2^2 \, e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &\vdots \\ \frac{\partial^{m+n} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^m \partial t_2^n} &= \int_{\mathbb{R}^2} x_1^m x_2^n \, e^{t_1 x_1 + t_2 x_2} \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x}. \end{aligned}$$

   Evaluando en $\mathbf{t} = \mathbf{0}$:

   $$\begin{aligned} \left. \frac{\partial^{m+n} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^m \, \partial t_2^n} \right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} &= \int x_1^m x_2^n \, f_{\mathbf{X}}(\mathbf{x}) \, d\mathbf{x} \\ &= \mathrm{E}(X_1^m X_2^n). \qquad \textbf{[1,2]} \end{aligned}$$

En lo que sigue, suponga que:

$$M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) = a(e^{t_1+t_2}+1) + b(e^{t_1}+e^{t_2}),$$

con $a, b \in \mathbb{R}$.

b) Obtenga $\mathrm{E}(X_1^n)$.

Solución:

$$\mathrm{E}(X_1^n) = \left.\frac{\partial^n M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n}\right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}.$$

Vemos que:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1} &= ae^{t_1+t_2} + be^{t_1} \\
\frac{\partial^2 M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^2} &= ae^{t_1+t_2} + be^{t_1} \\
&\vdots \\
\frac{\partial^n M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n} &= ae^{t_1+t_2} + be^{t_1}.
\end{aligned}$$

Luego,

$$\mathrm{E}(X_1^n) = \left.\frac{\partial^n M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n}\right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}} = a+b, \qquad \forall n \in \mathbb{N}. \qquad \textbf{[1,2]}$$

c) Obtenga $\mathrm{Var}(X_1^n)$.

Solución: El resultado anterior aplica para toda potencia natural, luego $\mathrm{E}((X_1^n)^2) = \mathrm{E}(X^{2n}) = a+b$. De este modo,

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}(X_1^n) &= \mathrm{E}(X_1^{2n}) - \mathrm{E}^2(X_1^n) \\
&= (a+b) - (a+b)^2. \qquad \forall n \in \mathbb{N} \ \textbf{[1,2]}
\end{aligned}$$

d) Obtenga $\mathrm{Cov}(X_1^n,\ X_2^n), n \geq 1$.

Solución: Se necesita:

$$\mathrm{E}(X_1^n X_2^n) = \left.\frac{\partial^{2n} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n\, \partial t_2^n}\right|_{\mathbf{t}=\mathbf{0}}.$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^n M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n} &= ae^{t_1+t_2} + be^{t_1} \\
\frac{\partial^{n+1} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n \partial t_2} &= ae^{t_1+t_2} \\
&\vdots \\
\frac{\partial^{2n} M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})}{\partial t_1^n \partial t_2^n} &= ae^{t_1+t_2}.
\end{aligned}$$

Evaluando en $\mathbf{t} = \mathbf{0}$:

$$\mathrm{E}(X_1^n X_2^n) = a. \qquad \textbf{[0,8]}$$

Por simetría de $M_{\mathbf{X}}(\mathbf{t})$, se tiene $\mathrm{E}(X_2^n) = \mathrm{E}(X_1^n) = a + b$. Luego,

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}(X_1^n,\ X_2^n) &= \mathrm{E}(X_1^n\ X_2^n) - \mathrm{E}(X_1^n)\mathrm{E}(X_2^n) \\ &= a - (a+b)^2. \qquad \textbf{[0,4]} \end{aligned}$$

e) Obtenga ρ_{X_1,X_2}.

Solución: Se tiene:

$$\rho_{X_1,X_2} = \frac{\mathrm{Cov}(X_1,\ X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}(X_2)}}.$$

Aplicando los resultados anteriores con $n = 1$, se obtiene:

$$\begin{aligned} \rho_{X_1,X_2} &= \frac{a - (a+b)^2}{\sqrt{(a+b) - (a+b)^2}\sqrt{(a+b) - (a+b)^2}} \\ &= \frac{a - (a+b)^2}{(a+b) - (a+b)^2} \qquad \textbf{[1,2]} \end{aligned}$$

[1,0] punto base

2. Sean U_1, U_2 y U_3 variables aleatorias independientes, con distribución Uniforme$[0,1]$. Sean $V_1 = U_1$, $V_2 = U_1U_2$ y $V_3 = U_1U_2U_3$.

a) Obtenga la densidad conjunta de V_1, V_2 y V_3.

Solución: La transformación corresponde a:

$$u_1 = v_1 \qquad u_2 = \frac{v_2}{v_1} \qquad u_3 = \frac{v_3}{v_2}, \qquad \textbf{[0,2]}$$

cuya matriz Jacobiana corresponde a:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -v_2/v_1^2 & 1/v_1 & 0 \\ 0 & -v_3/v_2^2 & 1/v_2 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[0,2]}$$

Luego, $\det J = 1/(v_1v_2) > 0$, cuando $v_1 \neq 0, v_2 \neq 0$ **[0,2]**. Por otra parte,

$$f_{U_1,U_2,U_3}(u_1,u_2,u_3) = I_{[0,1]}(u_1)\ I_{[0,1]}(u_2)\ I_{[0,1]}(u_3).$$

De este modo:

$$f_{V_1,V_2,V_3}(v_1,v_2,v_3) = \frac{1}{v_1v_2} I_{[0,1]}(v_1)\ I_{[0,1]}(v_2/v_1)\ I_{[0,1]}(v_3/v_2).$$

Es decir,

$$f_{V_1,V_2,V_3}(v_1,v_2,v_3) = \begin{cases} \frac{1}{v_1v_2} & ,(v_1,v_2,v_3) \in D \\ 0 & ,(v_1,v_2,v_3) \notin D, \end{cases}$$

[0,3] donde $D = \{(v_1,v_2,v_3) \in \mathbb{R}^3; 0 \leq v_3 \leq v_2 \leq v_1 \leq 1\}$.**[0,6]**

b) Obtenga la densidad condicional de V_3 dado que $V_2 = 0,8$.

Solución: Se necesita:

$$\begin{aligned} f_{V_2,V_3}(v_2,v_3) &= \int_{v_2}^1 \frac{1}{v_1v_2}\, dv_1 \\ &= \frac{1}{v_2} \log v_1 \Big|_{v_2}^1 \\ &= -\frac{1}{v_2} \log v_2, \qquad 0 \leq v_3 \leq v_2 \leq 1, \qquad \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

y $f_{V_2,V_3}(v_2,v_3) = 0$, en otro caso. **[0,1]** Por otra parte:

$$\begin{aligned} f_{v_2}(v_2) &= \int f_{V_2,V_3}(v_2,v_3)\, dv_3 \\ &= \int_0^{v_2} -\frac{1}{v_2} \log v_2\, dv_3 \\ &= -\log v_2, \qquad 0 \leq v_2 \leq 1, \qquad \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

y $f_{V_2}(v_2) = 0$, en otro caso. **[0,1]** Finalmente:

$$\begin{aligned} f_{V_3|V_2}(v_3|v_2) &= \frac{f_{V_2,V_3}(v_2, v_3)}{f_{V_2}(v_2)} \\ &= \frac{1}{v_2}, \qquad 0 \leq v_3 \leq v_2 \leq 1, \qquad \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

y $f_{V_3|V_2}(v_3|v_2) = 0$ en otro caso. **[0,1]** Se pide:

$$f_{V_3|V_2}(v_3|0,8) = \frac{1}{0,8}, \qquad 0 \leq v_3 \leq 0,8, \qquad \textbf{[0,2]}$$

y $f_{V_3|V_2}(v_3|0,8) = 0$ en otro caso. **[0,1]**
(Nota: también recibe puntaje completo si trabaja desde un comienzo con $v_2 = 0,8$)

c) Obtenga la densidad marginal de V_3 y verifique que $-\log V_3$ tiene distribución Gama$(3, 1)$.

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned} f_{V_3}(v_3) &= \int f_{V_2,V_3}(v_2, v_3)\, dv_2 \\ &= \int_{v_3}^{1} -\frac{1}{v_2} \log v_2 \, dv_2. \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

Integrando por partes:

$$\begin{aligned} & u = \log v_2 \qquad dv = -\frac{1}{v_2} dv_2 \\ \Longrightarrow \quad & du = \frac{1}{v_2} dv_2 \qquad v = -\log v_2. \end{aligned}$$

Entonces:

$$\begin{aligned} f_{V_3}(v_3) &= -(\log v_2)^2 \big|_{v_3}^{1} + \int_{v_3}^{1} \frac{1}{v_2} \log v_2 \, dv_2 \\ &= (\log v_3)^2 + \int_{v_3}^{1} \frac{1}{v_2} \log v_2 \, dv_2. \end{aligned}$$

Si definimos:

$$I = f_{V_3}(v_3) = \int_{v_3}^{1} -\frac{1}{v_2} \log v_2 \, dv_2,$$

hemos llegado a que:

$$I = (\log v_3)^2 - I,$$

de donde:

$$I = f_{V_3}(v_3) = \frac{1}{2}(\log v_3)^2, \qquad 0 \leq v_3 \leq 1, \qquad \textbf{[0,7]}$$

y $f_{V_3}(v_3) = 0$ en otro caso. **[0,1]**

Definiendo ahora $Z = -\log V_3$, se tiene:

$$v_3 = e^{-z}, \qquad \left|\frac{dv_3}{dz}\right| = e^{-z}.$$

Luego,

$$f_Z(z) = e^{-z}\frac{1}{2}(-z)^2 = \frac{1}{2}z^2e^{-z}, \qquad z > 0, \qquad \textbf{[0,4]}$$

y $f_Z(z) = 0$ en otro caso. **[0,1]** Luego $Z = -\log V_3$ sigue una distribución Gama$(3, 1)$.

d) Utilice la identidad $-\log V_3 = (-\log U_1) + (-\log U_2) + (-\log U_3)$ para demostrar que $-\log V_3$ tiene distribución Gama$(3, 1)$.

Solución: Sea $W_i = -\log U_i,\ i = 1, 2, 3$. La transformación entrega:

$$u_i = e^{-w_i}, \qquad \left|\frac{du_i}{dw_i}\right| = e^{-w_i}.$$

Luego,

$$f_{W_i}(w_i) = e^{-w_i}I_{[0,1]}(e^{-w_i}) = e^{-w_i}I(w_i \geq 0).$$

Luego, W_i sigue una distribución Exponencial(1). **[0,5]** De tabla, leemos que su función generadora de momentos es:

$$M_{W_i}(t) = \frac{1}{1-t}, \qquad t < 1. \qquad \textbf{[0,2]}$$

Luego, dado que $-logV_3 = W_1 + W_2 + W_3$, y que W_1, W_2 y W_3 son independientes **[0,3]**, se tiene:

$$M_{-\log V_3}(t) \;=\; \prod_{i=1}^{3} M_{W_i}(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^3, \qquad t < 1, \qquad \textbf{[0,5]}$$

que corresponde a la función generadora de momentos de una distribución Gama$(3, 1)$.

[1,0] punto base

3. Sea el vector aleatorio $\mathbf{Y} = (Y_1, Y_2, Y_3)^T$ con distribución Normal Multivariada de parámetros:

$$\boldsymbol{\mu} = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix}.$$

En lo que sigue, justifique todas sus afirmaciones.

a) Obtenga las distribuciones marginales de Y_1, Y_2 e Y_3.

Solución: Por definición de distribución Normal Multivariada, toda variable de la forma $\mathbf{a}^T\mathbf{Y}$, con $a \in \mathbb{R}^3$, sigue una distribución Normal. **[0,5]** Notemos que, si $a_1^T = (1, 0, 0)$, entonces:

$$Y_1 = a_1^T \mathbf{Y}.$$

Luego, Y_1 sigue una distribución Normal con media y varianza dadas por:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_1) &= \mathrm{E}(a_1^T\mathbf{Y}) = a_1^T\mu \\ &= (1,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} = 4 \qquad \textbf{[0,2]} \\ \mathrm{Var}(Y_1) &= \mathrm{Var}(a_1^T\mathbf{Y}) = a_1^T \boldsymbol{\Sigma}\, a_1 \\ &= (1,\ 0,\ 0) \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= 1. \qquad \textbf{[0,2]} \end{aligned}$$

Luego:

$$Y_1 \quad \sim \quad \text{Normal}(4, 1).$$

De manera análoga, tomando $a_2^T = (0, 1, 0)$ y $a_3^T = (0, 0, 1)$, se obtiene:

$$\begin{aligned} Y_2 &\sim \text{Normal}(8, 5) \qquad \textbf{[0,3]} \\ Y_3 &\sim \text{Normal}(12, 11). \qquad \textbf{[0,3]} \end{aligned}$$

b) Obtenga la distribución condicional de Y_3, dado $Y_1 = 6$ e $Y_2 = 7$.

Solución: En la notación utilizada en clases:

$$\mu_1 = 12 \qquad \boldsymbol{\mu}_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\Sigma_{11} = 11 \qquad \Sigma_{12} = (1, 5) \qquad \Sigma_{22} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}.$$

Luego, la distribución condicional de Y_3 dado $Y_1 = y_1$ e $Y_2 = y_2$ es Normal (univariada) **[0,5]** con media dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}(Y_3 | Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) &= 12 - (1, 5) \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 5 \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} 4 - y_1 \\ 8 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= 12 + (5, -3) \begin{pmatrix} 4 - y_1 \\ 8 - y_2 \end{pmatrix} \\ &= 12 + 5(4 - y_1) - 3(8 - y_2). \end{aligned}$$

Tomando $y_1 = 6, y_2 = 7$:

$$\mathrm{E}(Y_3|Y_1 = 6, Y_2 = 7) = -1. \qquad \textbf{[0,5]}$$

Por otra parte, la varianza está dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_3|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) &= 11 - (1,5) \begin{pmatrix} 5 & -2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \end{pmatrix} \\ &= 1. \qquad \textbf{[0,5]} \end{aligned}$$

Luego:

$$Y_3|Y_1 = 6, Y_2 = 7 \ \sim \ \mathrm{Normal}(-1,\ 1).$$

c) Obtenga la distribución condicional de $(Y_2, Y_3)^T$ dado que $Y_1 = 6$.

Solución: En la notación utilizada en clases:

$$\boldsymbol{\mu}_1 = \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} \qquad \mu_2 = 4$$
$$\Sigma_{11} = \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{12} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \Sigma_{22} = 1.$$

Luego, la distribución condicional de $(Y_2, Y_3)^T$ dado $Y_1 = y_1$ es Normal **[0,3]** con media dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{E}((Y_2, Y_3)^T|Y_1 = y_1) &= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (4 - y_1) \\ &= \begin{pmatrix} 8 \\ 12 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2\,(4 - y_1) \\ 4 - y_1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Tomando $y_1 = 6$:

$$\mathrm{E}((Y_2, Y_3)^T|Y_1 = 6) = \begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[0,6]}$$

Por otra parte, la varianza está dada por:

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}(Y_3|Y_1 = y_1, Y_2 = y_2) &= \begin{pmatrix} 5 & 5 \\ 5 & 11 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} (2,1) \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[0,6]} \end{aligned}$$

Luego:

$$(Y_2, Y_3)^T|Y_1 = 6 \ \sim \ \mathrm{Normal}\left(\begin{pmatrix} 12 \\ 14 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 10 \end{pmatrix} \right).$$

d) Sean $X_1 = Y_2 - Y_1$ y $X_2 = Y_3 - Y_2$. Obtenga la distribución condicional de X_2 cuando X_1 = 0.

Solución: Sea la matriz de 2×3:

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Entonces $\mathbf{X}^T = (X_1, X_2) = A\mathbf{Y}$. Sabemos entonces que $\mathbf{X}$ sigue una distribución Normal bivariada. **[0,2]** Sus parámetros corresponden a:

$$\begin{aligned}
\text{E}(\mathbf{X}) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 8 \\ 12 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \textbf{[0,3]} \\
\text{Var}(\mathbf{X}) &= \begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 5 & 5 \\ 1 & 5 & 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ -1 & 0 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}. \qquad \textbf{[0,3]}
\end{aligned}$$

Luego:

$$\begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix} \sim \text{Normal}\left(\begin{pmatrix} 4 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix} \right).$$

Para encontrar la distribución condicional de X_2 dado $X_1 = 0$, en la notación utilizada en clases:

$$\mu_1 = \mu_2 = 4 \qquad \Sigma_{11} = 6 \qquad \Sigma_{12} = 1 \qquad \Sigma_{22} = 2.$$

Luego, la distribución de X_2 dado $X_1 = x_1$ corresponde a una distribución Normal **[0,3]** de media y varianzas dadas por:

$$\begin{aligned}
\text{E}(X_2|X_1 = x_1) &= 4 - 1 \cdot \frac{1}{2}(4 - x_1) \\
\text{Var}(X_2|X_1 = x_1) &= 6 - 1 \cdot \frac{1}{2} \cdot 1.
\end{aligned}$$

Evaluando en $x_1 = 0$, obtenemos:

$$X_2|X_1 = 0 \sim \text{Normal}(2, 11/2).$$

[0,2] por media, [0,2] por varianza

[1,0] punto base

4. *a*) Sean X_1, X_2 variables aleatorias independientes, ambas con distribución Doble Exponencial,

$$f_X(x) = \frac{1}{2}\exp\{-|x|\}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Encuentre la función generadora de momentos de $Y = |X_1| + |X_2|$.

Solución: Se pide:

$$\begin{aligned} M_Y(t) &= \mathrm{E}(e^{tY}) = \mathrm{E}(e^{t|X_1|+t|X_2|}) \\ &= \mathrm{E}(e^{t|X_1|})\mathrm{E}(e^{t|X_2|}) \qquad \text{por independencia} \\ &= M_{|X_1|}(t)\, M_{|X_2|}(t) = \left(M_{|X_1|}(t)\right)^2, \qquad \textbf{[1,0]} \end{aligned}$$

pues $|X_1|$ y $|X_2|$ tienen la misma distribución. Por otra parte,

$$\begin{aligned} M_{|X_1|}(t) &= \mathrm{E}(e^{t|X_1|}) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{t|u|}\frac{1}{2}e^{-|u|}\, du \\ &= \frac{1}{2}\left\{\int_{-\infty}^{0} e^{u(1-t)}\, du + \int_{0}^{\infty} e^{u(t-1)}\, du\right\}. \qquad \textbf{[0,6]} \end{aligned}$$

Para que ambas integrales existan, se debe cumplir que $t < 1$. **[0,4]** En ese caso:

$$\begin{aligned} M_{|X_1|}(t) &= \frac{1}{2}\left\{\left.\frac{e^{u(1-t)}}{1-t}\right|_{-\infty}^{0} + \left.\frac{e^{u(t-1)}}{t-1}\right|_{0}^{\infty}\right\} \\ &= \frac{1}{1-t}. \qquad \textbf{[0,6]} \end{aligned}$$

Luego,

$$M_Y(t) = \left(\frac{1}{1-t}\right)^2. \qquad \textbf{[0,4]}$$

b) Sea el vector aleatorio

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix},$$

con $\mathbf{X}_1$ y $\mathbf{X}_2$ vectores aleatorios de dimensiones n_1 y n_2, respectivamente. Demuestre que, para todo $\mathbf{t}_1 \in \mathbb{R}^{n_1}$ y $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^{n_2}$:

$$\varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1) = \varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t_1}, \mathbf{0}).$$

Solución: Sea $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^n$, con $n = n_1 + n_2$:

$$\mathbf{t} = \begin{pmatrix} \mathbf{t}_1 \\ \mathbf{t}_2 \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}_1 = \begin{pmatrix} t_1 \\ \vdots \\ t_{n_1} \end{pmatrix} \qquad \mathbf{t}_2 = \begin{pmatrix} t_{n_1+1} \\ \vdots \\ t_n \end{pmatrix},$$

luego,

$$\mathbf{t}^T\mathbf{X} = (\mathbf{t}_1^T,\ \mathbf{t}_2^T)\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \mathbf{X}_2 \end{pmatrix} = \mathbf{t}_1^T\mathbf{X}_1 + \mathbf{t}_2^T\mathbf{X}_2. \qquad \textbf{[1,0]}$$

Se tiene:

$$\begin{aligned}\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}) &= \mathrm{E}\left(e^{i\mathbf{t}^T\mathbf{X}}\right) \\ &= \mathrm{E}\left(e^{i(\mathbf{t}_1^T\mathbf{X}_1+\mathbf{t}_2^T\mathbf{X}_2)}\right). \qquad \textbf{[1,0]}\end{aligned}$$

Si tomamos $\mathbf{t}_2 = \mathbf{0}$,

$$\varphi_{\mathbf{X}}(\mathbf{t}_1, \mathbf{0}) = \mathrm{E}\left(e^{i\mathbf{t}_1^T\mathbf{X}_1}\right) = \varphi_{\mathbf{X}_1}(\mathbf{t}_1), \qquad \textbf{[1,0]}$$

que es lo que se pedía demostrar.

[1,0] punto base

Distribuciones

Distribución	Densidad de Probabilidad	Θ_X	Parámetros	Esperanza y Varianza
Binomial	$\binom{n}{x} p^x (1-p)^{n-x}$	$x = 0, \ldots, n$	$n,\ p$	$\mu_X = n\,p$ $\sigma_X^2 = n\,p\,(1-p)$ $M(t) = [p\,e^t + (1-p)]^n, \quad t \in \mathbb{R}$
Geométrica	$p\,(1-p)^{x-1}$	$x = 1, 2, \ldots$	p	$\mu_X = 1/p$ $\sigma_X^2 = (1-p)/p^2$ $M(t) = p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t], \quad t < -\ln(1-p)$
Binomial-Negativa	$\binom{x-1}{r-1} p^r (1-p)^{x-r}$	$x = r, r+1, \ldots$	$r,\ p$	$\mu_X = r/p$ $\sigma_X^2 = r\,(1-p)/p^2$ $M(t) = \left\{p\,e^t/[1-(1-p)\,e^t]\right\}^r, \quad t < -\ln(1-p)$
Poisson	$\frac{(\nu\,t)^x\,e^{-\nu\,t}}{x!}$	$x = 0, 1, \ldots$	ν	$\mu_X = \nu\,t$ $\sigma_X^2 = \nu\,t$ $M(t) = \exp\left[\lambda\,\left(e^t - 1\right)\right], \quad t \in \mathbb{R}$
Exponencial	$\nu\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	ν	$\mu_X = 1/\nu$ $\sigma_X^2 = 1/\nu^2$ $M(t) = \nu/(\nu - t), \quad t < \nu$
Gamma	$\frac{\nu^k}{\Gamma(k)}\,x^{k-1}\,e^{-\nu\,x}$	$x \geq 0$	$k,\ \nu$	$\mu_X = k/\nu$ $\sigma_X^2 = k/\nu^2$ $M(t) = [\nu/(\nu - t)]^k, \quad t < \nu$
Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,\sigma}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2\right]$	$-\infty < x < \infty$	$\mu,\ \sigma$	$\mu_X = \mu$ $\sigma_X^2 = \sigma^2$ $M(t) = \exp(\mu\,t + \sigma^2\,t^2/2), \quad t \in \mathbb{R}$
Log-Normal	$\frac{1}{\sqrt{2\,\pi}\,(\zeta\,x)}\,\exp\left[-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln\,x - \lambda}{\zeta}\right)^2\right]$	$x \geq 0$	$\lambda,\ \zeta$	$\mu_X = \exp\left(\lambda + \frac{1}{2}\,\zeta^2\right)$ $\sigma_X^2 = \mu_X^2\,\left(e^{\zeta^2} - 1\right)$ $E(X^r) = e^{r\,\lambda}\,M_Z(r\,\zeta)$, con $Z \sim$Normal(0,1)
Uniforme	$\frac{1}{(b-a)}$	$a \leq x \leq b$	$a,\ b$	$\mu_X = (a+b)/2$ $\sigma_X^2 = (b-a)^2/12$ $M(t) = [e^{t\,b} - e^{t\,a}]/[t\,(b-a)], \quad t \in \mathbb{R}$
Beta	$\frac{1}{B(q,\,r)}\,\frac{(x-a)^{q-1}\,(b-x)^{r-1}}{(b-a)^{q+r-1}}$	$a \leq x \leq b$	$q,\ r$	$\mu_X = a + \frac{q}{q+r}\,(b-a)$ $\sigma_X^2 = \frac{q\,r\,(b-a)^2}{(q+r)^2\,(q+r+1)}$
Hipergeométrica	$\frac{\binom{m}{x}\,\binom{N-m}{n-x}}{\binom{N}{n}}$	$\max\{0, n+m-N\} \leq x \leq \min\{n, m\}$	$N,\ m,\ n$	$\mu_X = n\,\frac{m}{N}$ $\sigma_X^2 = \left(\frac{N-n}{N-1}\right)\,n\,\frac{m}{N}\,\left(1 - \frac{m}{N}\right)$