Pontificia Universidad Católica de Chile
EYP1026 2017-2
Profesor: Ana Araneda
Ayudante: Daniel Saavedra (dlsaavedra@uc.cl)

Ayudantía N 4

---

1. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} Cx^{a-1}y^{b-1}(1-x-y)^{c-1} & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \notin D, \end{cases}$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) \in (0,1) \times (0,1),\ y + x < 1\}$ donde $a, b, c \in \mathbb{R}^+$.

   (a) Discuta a qué corresponde esta distribución.
   (b) Demuestre que $C = \frac{\Gamma(a+b+c)}{\Gamma(a)\Gamma(b)\Gamma(c)}$.
   (c) Obtenga la distribución marginal de Y.

2. La concesionaria de cierta autopista quiere determinar si en la salida número 5 de su autopista instala una o dos casetas de peajes, lo que depende de la frecuencia con la que llegan los autos a esta caseta. Para esto se estudió la relación que existe entre el tiempo (en horas) en el que llega exactamente un auto al peaje, X, y el tiempo (en horas) en el que llegan exactamente dos autos al peaje, Y, el tiempo se mide desde una hora arbitraria, supongamos 8:00 am. Se descubrió que esta relación se puede describir como sigue:

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} 2xe^{-x(y+1)} & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \notin D, \end{cases}$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 0,\ y \geq 1\}$.

   (a) Encontrar la función de densidad del instante en que llega un auto al peaje. ¿Reconoce alguna distribución?
   (b) ¿Son variables aleatorias X e Y independependientes?
   (c) La concesionaria dispondrá dos casetas si la llegada de dos autos durante, a lo más 2 horas, ocurre más del 30% de las veces. ¿Qué resolución toma la concesionaria?

3. Sea (X, Y) un vector aleatorio con densidad de probabilidad conjunta

$$f_{XY}(x,y) = \begin{cases} e^{-y} & ,(x,y) \in D \\ 0 & ,(x,y) \notin D, \end{cases}$$

con $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x < y\}$.

(a) Determine la distribución de probabilidad marginal de X e Y. ¿Son independientes?

(b) Calcule la distribución condicional $X|Y = y : y \in R^+$.

4. Las viviendas sociales de las regiones australes del país han sido diseñadas de manera de soportar la fuerza de las tormentas. Sin embargo, se estima que la probabilidad de que una de ellas falle en una tormenta dada es 7,35%.

   (a) Si la ocurrencia de tormentas en estas regiones ocurre según un proceso de Poisson con tasa de una tormenta cada 5 años, ¿cuál es la probabilidad de que una vivienda dada falle al menos una vez en un período de 25 años?

   (b) Suponga que en un poblado existen 4 de estas viviendas. ¿Cuál es la probabilidad de que al menos dos de ellas no fallen durante un período de 25 años? Suponga que las fallas de diferentes viviendas ocurren de manera independiente.