Pontificia Universidad Católica de Chile
EYP1026 2017-2
Profesor: Ana María Araneda
Ayudante: Daniel Saavedra (dlsaavedra@uc.cl)

Ayudantía N 1

Problema 1

(a) Sea $\{A, B, C\}$ una partición de un espacio muestral Ω. Encuentre explícitamente los ocho elementos de $\sigma(\{A, B, C\})$, el mínimo σ-álgebra de elementos de Ω que contiene a A, B y C.

(b) Considere un mazo de 9 cartas, numeradas del 1 al 9, desde donde se extrae una de ellas. Se define el espacio de probabilidad $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, con $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$, $\mathcal{F} = \sigma(\{1, 4, 7\}, \{2, 5, 8\}, \{3, 6, 9\})$ y $\mathbb{P}(\{1, 4, 7\}) = \mathbb{P}(\{2, 5, 8\}) = \mathbb{P}(\{3, 6, 9\})$. Sea X una función que toma el valor 1 si la carta extraida es multiplo de 3 y 0 en otro caso. Determine si X corresponde a una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. En caso de corresponder, obtenga $\mathbb{P}(X = 1)$.

(c) En la situación anterior, sea Y una función que vale 1 si la carta es par y 0 en otro caso. Determine si Y corresponde a una variable aleatoria en $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. En caso de corresponder, obtenga $\mathbb{P}(Y = 1)$.

Problema 2

Sea $\mathbb{P}$ una medida de probabilidad definida sobre un espacio medible $(\Omega, \mathcal{F})$, y A y B dos eventos en $\mathcal{F}$.

(a) Muestre que la probabilidad que ocurra exactamente uno de los eventos, A o B, es igual a $\mathbb{P}(A) + \mathbb{P}(B) - 2\mathbb{P}(A \cap B)$.

(b) Sean $A,\ B$ tales que $\mathbb{P}(A) = 1/3$ y $\mathbb{P}(B^c) = 1/4$ ¿Pueden A y B ser eventos disjuntos? Justifique.

(c) Demuestre que $\mathbb{P}(A) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{P}(A \cap C_n)$ para alguna partición del espacio $\{C_n\}_{n \geq 1}$ y $C_n \in \mathcal{F}, n \geq 1$.

Problema 3

Se lanza un dado hasta que aparece un seis, registrándose el resultado de cada lanzamiento.

(a) ¿Cuál es el espacio muestral de este experimento?

(b) Si E_n denota el suceso: *son necesarios n lanzamientos para completar el experimento.* ¿Qué elementos del espacio muestral están contenidos en E_n?

(c) ¿A qué corresponde $(\bigcup_{i=1}^{\infty} E_n)^c$?

Problema 4

Considere el lanzamiento de un dado no equilibrado, y la variable aleatoria X correspondiente al número de puntos que muestra su cara superior al caer. Cierta medida de probabilidad determina la siguiente función de probabilidad discreta para X:

$$p_X(x) = \begin{cases} c\, 0,7^x\, 0,3^{6-x} & ,x \in \{1,\ldots,6\} \\ 0 & ,x \notin \{1,\ldots,6\}. \end{cases}$$

(a) Obtenga el valor de la constante c.

(b) Encuentre la función de distribución acumulada F_X de X.

(c) Obtenga la probabilidad de que el número en la cara superior esté entre 2 y 4, ambos valores inclusive.

Problema 5

Suponga que la variable aleatoria X tiene función densidad de probabilidad dada por:

$$f_X(x) = \begin{cases} c|x| & ,-2 < x < 2 \\ \\ 0 & ,x \leq -2 \;\; x \geq 2. \end{cases}$$

(a) Determine el valor de la constante c.

(b) Obtenga $P(|X| < 1)$.