Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Soluciones - Ayudantía N°13

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 16 de Noviembre - 2016

4.a) Por la propiedad de la Esperanza Iterada

$$\mathrm{E}[Y_t] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[Y_t|N_t]] : t \geq 0.$$

Ahora

$$f(n) = \mathrm{E}[Y_t|N_t = n] = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{E}[X_k] = n\mathrm{E}[X_1] = np^{-1} : n \in \mathbb{N}_0$$

pues $X_0 = 0$ y la secuencia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *i.i.d.* (con distribución común Geométrica(p)) e independiente del proceso de Poisson. Finalmente

$$\mathrm{E}[Y_t] = \mathrm{E}[f(N_t)] = \mathrm{E}[N_t]p^{-1} = \lambda t p^{-1} : t \geq 0.$$

4.b) Por la propiedad de la Descomposición de la Varianza

$$\mathrm{Var}[Y_t] = \mathrm{E}[\mathrm{Var}[Y_t|N_t]] + \mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y_t|N_t]] : t \geq 0.$$

Mediante (4.a)

$$\mathrm{Var}[\mathrm{E}[Y_t|N_t]] = \mathrm{Var}[f(N_t)] = \mathrm{Var}[N_t p^{-1}] = \mathrm{Var}[N_t]p^{-2} = \lambda t p^{-2} : t \geq 0.$$

Por otra parte

$$g(n) = \mathrm{Var}[Y_t|N_t = n] = \sum_{k=0}^{n} \mathrm{Var}[X_k] = n\mathrm{Var}[X_1] = n(1-p)p^{-2} : n \in \mathbb{N}_0$$

pues $X_0 = 0$ y la secuencia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *i.i.d.* (con distribución común Geométrica(p)) e independiente del proceso de Poisson. Finalmente

$$\mathrm{Var}[Y_t] = \mathrm{E}[N_t](1-p)p^{-2} + \lambda t p^{-2} = \lambda t(1-p)p^{-2} + \lambda t p^{-2} = \lambda t(2-p)p^{-2} : t \geq 0.$$

4.c) Sin pérdida de generalidad, considere $s > t \geq 0$. Utilizando la propiedad de la Esperanza Iterada junto con (4.a)

$$\mathrm{Cov}[Y_s, Y_t] = \mathrm{E}[Y_s Y_t] - \mathrm{E}[Y_s]\mathrm{E}[Y_t] = \mathrm{E}[\mathrm{E}[Y_s Y_t|N_t, N_s - N_t]] - \lambda^2 stp^{-2}.$$

Ahora

$$h(m,n) = \mathrm{E}[Y_s Y_t|N_t = m, N_s - N_t = n] = \sum_{i=0}^{m+n}\sum_{j=0}^{m} \mathrm{E}[X_i X_j] : m, n \in \mathbb{N}_0.$$

Se puede demostrar que

$$\sum_{i=0}^{m+n}\sum_{j=0}^{m} \mathrm{E}[X_i X_j] = m(1-p)p^{-2} + m^2 p^{-2} + mnp^{-2}.$$

pues $X_0 = 0$ y la secuencia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *i.i.d.* (con distribución común Geométrica(p)) e independiente del proceso de Poisson. Con esta información

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}[Y_s Y_t] &= \mathrm{E}[h(N_t, N_s - N_t)] \\
&= \mathrm{E}[N_t](1-p)p^{-2} + \mathrm{E}[N_t^2]p^{-2} + \mathrm{E}[N_t(N_s - N_t)]p^{-2} \\
&= \lambda t(1-p)p^{-2} + (\lambda t + \lambda^2 t^2)p^{-2} + \mathrm{E}[N_t]\mathrm{E}[N_s - N_t]p^{-2} \\
&= \lambda t(1-p)p^{-2} + (\lambda t + \lambda^2 t^2)p^{-2} + \lambda^2 t(s-t)p^{-2} \\
&= \lambda t(2-p)p^{-2} + \lambda^2 stp^{-2}.
\end{aligned}$$

Finalmente

$$\mathrm{Cov}[Y_s, Y_t] = \lambda t(2-p)p^{-2} + \lambda^2 stp^{-2} - \lambda^2 stp^{-2} = \lambda\, \mathrm{mín}\{s,t\}(2-p)p^{-2} : s > t \geq 0$$

ya que $s > t \geq 0 \Rightarrow \mathrm{mín}\{s,t\} = t$.

4.*d*) Primero probaremos que $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ posee incrementos estacionarios, es decir

$$Y_s - Y_t \overset{\mathcal{D}}{=} Y_{s-t} : s > t \geq 0.$$

Defina

$$S_d = \sum_{k=0}^{d} X_k : d \in \mathbb{N}_0.$$

Sea $y \in \mathbb{R}$. Note que

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y_s - Y_t \leq y) &= \mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_s - N_t} \leq y)] \\
\mathbb{P}(Y_{s-t} \leq y) &= \mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{s-t}} \leq y)].
\end{aligned}$$

pues $X_0 = 0$ y la secuencia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *i.i.d.* e independiente de $\{N_t\}_{t\geq 0}$. Para finalizar, $N_s - N_t \overset{\mathcal{D}}{=} N_{s-t}$ con $\mathrm{Rec}(N_{s-t}) = \mathbb{N}_0$ implica que

$$\mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_s - N_t} \leq y)] = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k \leq y)\mathbb{P}(N_s - N_t = k) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(S_k \leq y)\mathbb{P}(N_{s-t} = k) = \mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{s-t}} \leq y)].$$

Para demostrar que $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ tiene incrementos independientes, debemos probar que

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_{k=1}^{n} \{\Delta_k \leq y_k\}\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathbb{P}(\Delta_k \leq y_k) : \Delta_k = Y_{t_k} - Y_{t_{k-1}}$$

para cualquier $n \in \mathbb{N}$, $t_n > \cdots > t_0 \geq 0$ e $y_1, \ldots, y_n \in \mathbb{R}$. Sólo mostraremos para $n = 2$ ya que los argumentos son similares para el caso general. Para ello, sean $t_2 > t_1 > t_0 \geq 0$ e $y_1, y_2 \in \mathbb{R}$. Observe que

$$\mathbb{P}(\Delta_1 \leq y_1, \Delta_2 \leq y_2) = \mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{t_1} - N_{t_0}} \leq y_1, S_{N_{t_2} - N_{t_1}} \leq y_2)]$$

pues $X_0 = 0$ y la secuencia $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ es *i.i.d.* e independiente de $\{N_t\}_{t\geq 0}$. Luego

$$\mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{t_1} - N_{t_0}} \leq y_1, S_{N_{t_2} - N_{t_1}} \leq y_2)] = \mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{t_1 - t_0}} \leq y_1, S_{N_{t_2 - t_1}} \leq y_2)].$$

Dado que S_i es independiente de $S_{i+j} - S_i$ y $S_j \overset{\mathcal{D}}{=} S_{i+j} - S_i$ con $i, j \in \mathbb{N}_0$

$$\mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{t_1 - t_0}} \leq y_1, S_{N_{t_2 - t_1}} \leq y_2)] = \mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{t_1 - t_0}} \leq y_1)]\mathrm{E}[\mathbb{P}(S_{N_{t_2 - t_1}} \leq y_2)] = \mathbb{P}(\Delta_1 \leq y_1)\mathbb{P}(\Delta_2 \leq y_2).$$