Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Ayudantía N°13

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 16 de Noviembre - 2016

1. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* con distribución común Uniforme$(0,1)$. Defina

$$Z_n = \frac{n^{1/2}R_n - \frac{1}{3}n^{3/2}}{S_n}$$

donde

$$R_n = \sum_{k=1}^{n} X_k^2 \quad \text{y} \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} X_k.$$

Determine la distribución límite de Z_n cuando $n \to \infty$.

2. Sean $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ e $\{Y_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ secuencias de variables aleatorias *i.i.d.* tales que $\mathrm{E}[X_1] = 0$, $\mathrm{Var}[X_1] = \sigma^2 \in \mathbb{R}^+$, $\mathrm{E}[Y_1] = \mu \in \mathbb{R}$ y $\mathrm{E}[Y_1^2] \in \mathbb{R}^+$. Demuestre que

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} Y_k + \frac{1}{n^{1/2}}\sum_{k=1}^{n} X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(\mu, \sigma^2).$$

3. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* con distribución común Uniforme$(0,\theta)$ con $\theta \in \mathbb{R}^+$. Pruebe que

$$Y_n = (3n)^{1/2}\left[\log\left(\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) - \log(\theta)\right] \xrightarrow{\mathcal{D}} \text{Normal}(0,1).$$

4. Sean $\{N_t\}_{t\geq 0}$ un proceso de Poisson con tasa $\lambda \in \mathbb{R}^+$ y $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una secuencia de variables aleatorias *i.i.d.* con distribución común Geométrica$(p) : p \in (0,1)$ e independientes del proceso de Poisson. Defina

$$Y_t = \sum_{k=0}^{N_t} X_k : t \geq 0$$

bajo la convención $X_0 = 0$. Pruebe que

a) $\mathrm{E}[Y_t] = \lambda t p^{-1}$ con $t \geq 0$.

b) $\mathrm{Var}[Y_t] = \lambda t(2-p)tp^{-2}$ con $t \geq 0$.

c) $\mathrm{Cov}[Y_s, Y_t] = \lambda\, \text{mín}\{s,t\}(2-p)p^{-2}$ con $s,t \geq 0$ $(s \neq t)$.

d) $\{Y_t\}_{t\geq 0}$ es un proceso estocástico con incrementos independientes y estacionarios.