Pontificia Universidad Católica de Chile
Facultad de Matemáticas
Departamento de Estadística

# EYP1026 - MODELOS PROBABILÍSTICOS
Ayudantía N°11

Profesor: Guido del Pino
Ayudante: José Quinlan
Fecha: 26 de Octubre - 2016

1. Considere el modelo jerárquico

$$Y \mid X = x \sim \text{Poisson}(x)$$
$$X \sim \text{Gamma}(\alpha, \beta) : \alpha, \beta \in \mathbb{R}^+.$$

   Identifique la distribución de $X \mid Y = y : y \in \mathbb{N}_0$.

2. Sea $(X, Y)$ un vector aleatorio cuya distribución viene dada por la siguiente representación jerárquica:

$$Y \mid X = x \sim \text{Uniforme}(0, 1/|x|)$$
$$f_X(x) = 0{,}5 \exp\{-|x|\}\mathbb{I}(x \in \mathbb{R}).$$

   *a*) Determine la densidad conjunta del vector aleatorio $(X, Y)$.

   *b*) Identifique la distribución ligada a $Y$.

   *c*) Calcule la densidad condicional para $X \mid Y = y : y \in \mathbb{R}^+$.

3. Sea $\{U_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias independientes con densidad común

$$f(u) = \mathbb{I}(u \in (0, 1)).$$

   Defina

$$V_1 = U_1$$
$$V_n = U_n \prod_{i=1}^{n-1} (1 - U_i) : n \geq 2.$$

   Pruebe que $V_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

4. Sea $\{X_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ una colección de variables aleatorias independientes con densidad común

$$f(x) = \frac{1}{\sigma} \exp\left\{\frac{\mu - x}{\sigma}\right\}\mathbb{I}(x \in (\mu, +\infty))$$

   donde $\mu \in \mathbb{R}$ y $\sigma \in \mathbb{R}^+$ son fijos.

   *a*) Demuestre que $X_{(1)} = \text{mín}\{X_1, \ldots, X_n\} \xrightarrow{\mathbb{P}} \mu$.

   *b*) Determine $c \in \mathbb{R}$ tal que $\overline{X}_n^2 \exp\{-\overline{X}_n\} \xrightarrow{\mathbb{P}} c$.