EYP1026 Modelos Probabilísticos
Interrogación 2

Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Ramón Murias
Semestre	2016/1

1. Suponga que $f_1(x)$ y $f_2(x)$ son dos funciones densidad de probabilidad en $\mathbb{R}$, y suponga que para $j = 1, 2$, $M_j(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{tx} f_j(x)\, dx$ existe y es expandible en serie de potencias infinita para $t \in (a_j, b_j)$, con $-\infty \leq a_j < 0 < b_j \leq \infty$. Para $0 \leq r \leq 1$ defina

$$f(x) = r f_1(x) + (1 - r) f_2(x), \qquad x \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

   (a) (2 pt.) Pruebe que $f(x)$ definida en (1) es una función densidad de probabilidad, y muestre que si $X \sim f(x)$, entonces $M_X(t)$ existe para t en un cierto intervalo (que debe determinar explícitamente) y exprésela en términos de $M_1(t)$ y $M_2(t)$.

   (b) (2 pt.) Encuentre una expresión para todos los momentos de $X \sim f(x)$ en función de los momentos asociados a f_1 y f_2.

   (c) (2 pt.) Pruebe que si $f_1(x) = f_1(-x)$ y $f_2(x) = f_2(-x)$ para todo $x \in \mathbb{R}$ entonces la función característica de $X \sim f(x)$ con $f(x)$ dado en (1) es real-valorada cualquiera que sea $0 \leq r \leq 1$.

2. Se encienden simultáneamente dos ampolletas. Suponga que la ampolleta j tiene un tiempo de vida con distribución exponencial de parámetro $\lambda_j > 0$ para $j = 1, 2$, y que ambas ampolletas funcionan independientemente entre sí.

   (a) (4 pt.) Calcule la probabilidad de que la ampolleta 1 se queme antes que la ampolleta 2.

   (b) (2 pt.) Calcule la probabilidad de que al menos una de las ampolletas dure más que $t > 0$ unidades de tiempo.

   Nota: $W \sim \text{Exp}(\theta)$ significa que $f_W(w) = \theta \exp(-w\theta) I\{w > 0\}$, $\theta > 0$.

3. Considere una placa rectangular, cuyo largo (X) y ancho (Y) son v.a. con función de densidad conjunta:

$$f_{X,Y}(x, y) = \begin{cases} k(x + y) & \text{si } 0 < x < 2, \quad 0 < y < 1 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

   (a) (2.5 pt.) Muestre que $k = 1/3$. ¿Son el largo y el ancho independientes? Justifique.

   (b) (1.5 pt.) Calcule la probabilidad de que el ancho de la placa no exceda la mitad de su largo.

   (c) (2 pt.) Encuentre la densidad del vector (U, V), donde U y V son el área y el largo de la placa, respectivamente.

4. Suponga que X_1 y X_2 son i.i.d. con densidad común $f(x) = I\{-1/2 < x < 1/2\}$. Encuentre la densidad de $X_1 + X_2$.

Tiempo: 2 horas y 30 minutos