EYP1026 Modelos Probabilísticos
Interrogación 1

Profesor	Fernando Quintana
Ayudante	Ramón Murias
Semestre	2016/1

1. Considere el siguiente experimento. Se dispone de dos dados. El dado A tiene 4 caras rojas y 2 blancas, mientras que el dado B tiene 2 caras rojas y 4 blancas. Se lanza una moneda honesta, y si sale cara, el experimento continúa sólo con el dado A, mientras que si sale sello, se continúa sólo con el dado B.

   (a) (1p) Pruebe que la probabilidad de obtener cara roja en cualquier lanzamiento del dado es $\frac{1}{2}$.

   (b) (2.5p) Suponga que se lanza el dado seleccionado n veces, independientemente. Si todos ellos resultaron en cara roja, ¿cuál es la probabilidad de que el dado seleccionado haya sido el A?

   (c) (2.5p) Si, como en (a), los primeros n lanzamientos del dado resultaron en cara roja, ¿cuál es la probabilidad de que el siguiente también resulte en cara roja?

2. Un mazo contiene n cartas numeradas $1, 2, \ldots, n$. Una persona escoge una carta al azar y la devuelve al mazo. Luego, escoge otra carta del mazo, la devuelve, y continúa así hasta obtener una misma carta por segunda vez. Sea X el número total de extracciones hasta obtener la repetición.

   (a) (3p) Determine el soporte de X, calcule $P(X > k)$, y use este resultado para obtener la distribución de X (función de probabilidad discreta).
   Ind: Note que $P(X = k) = P(X > k - 1) - P(X > k)$.

   (b) (3p) Pruebe que

   $$E(X) = 2 + \left(1 - \frac{1}{n}\right) + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right) + \cdots + \left(1 - \frac{1}{n}\right)\left(1 - \frac{2}{n}\right)\cdots\left(1 - \frac{n-1}{n}\right).$$

   Ind: Pruebe y use el hecho que si X es una variable aleatoria con soporte $\mathcal{X} \subset \{0, 1, 2, \ldots\}$ entonces $E(X) = \sum_{k=0}^{\infty} P(X > k)$.

(sigue...)

3. Suponga que variable aleatoria X tiene densidad dada por

$$f_X(x) = \begin{cases} c|x| & \text{si } -2 < x < 2 \\ 0 & \text{si no.} \end{cases}$$

   (a) (1p) Determine c.

   (b) (1p) Calcule $P(|X| < 1)$.

   (c) (4p) Pruebe que todos los momentos de X existen, calcúlelos, y en particular, obtenga la esperanza y varianza correspondientes.

4. Pedro y Juan desean sortear la última galleta que queda de un cierto paquete, mediante el lanzamiento de una moneda. Como ninguno de ellos tiene una moneda, le piden ayuda a su amigo común Diego. Desafortunadamente, Diego sólo cuenta con una moneda deshonesta ($P(\text{CARA}) = p$ con $0 < p < 1$ y p no necesariamente igual a $\frac{1}{2}$). Sin embargo, Diego les propone realizar el siguiente algoritmo:

   (1) Se lanza la moneda 2 veces, independientemente.
   (2) Si los resultados de los 2 lanzamientos son iguales, vuelva a (1).
   (3) Si el resultado es $\{$CARA, SELLO$\}$, la galleta es para A, y para B si el resultado es $\{$SELLO, CARA$\}$

   (a) (2p) Obtenga el número esperado de lanzamientos requeridos para completar el algoritmo.

   (b) (4p) Pruebe que al terminar el algoritmo, ambos resultados son equiprobables, cualquiera que sea el valor de $p \in (0, 1)$.

Tiempo: 2 horas y 30 minutos