Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2025
IIC2224 — Autómatas y Compiladores — 2' 2025

PAUTA TAREA 4

Pregunta 1

Para la resolución de este problema utilizaremos una tabla de Hash $H : Q \to k$ con $k \in [1, n]$, donde $H[q]$ almacena el i desde donde inició la simulación que llegó a q. Además, podemos suponer que la tabla de Hash nos permite acceder a los valores guardados en tiempo $\mathcal{O}(1)$.

Considerando lo anterior, el siguiente pseudocódigo resuelve el problema pedido:

Algoritmo: `Find-One`

Input: Un NFA-$\mathcal{A} = \{Q, \Sigma, \Delta, I, F\}$ y una palabra $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$.
Output: Un par (i, j) tal que $a_i \dots a_j \in \mathcal{L}(\mathcal{A})$ o $\perp$ en caso de no existir.

Function `Find-One`(A, w)**:**
  $H \leftarrow \emptyset$;
  for $j = 1$ **to** n **do**
    $H' \leftarrow H$;
    $H \leftarrow \emptyset$;
    foreach $p \in Q$ **do**
      if $(p, a_j, q) \in \Delta \wedge H'[p] \neq$ *NULL* **then**
        $H[q] \leftarrow H'[p]$;
      end
    end
    foreach $p \in I$ **do**
      if $(p, a_j, q) \in \Delta$ **then**
        $H[q] \leftarrow j$;
      end
    end
    foreach $p \in F$ **do**
      if $H[p] \neq$ *NULL* **then**
        return $(H[p], j)$;
      end
    end
  end
  return $\perp$;

Demostremos la correctitud de nuestro algoritmo:

- **Invariante**: $Inv(j)$; al terminar la j-ésima iteración, $\forall p \in Q$, si $H[p] \neq \texttt{NULL}$, entonces, sea $H[p] = i$, existe una ejecución en $\mathcal{A}$ sobre $a_i \dots a_j$ que llega al estado p.

CB: Considerando que todo H parte en `NULL`; al finalizar la primera iteración todo $q \in Q$ tal que $H[q] \neq \texttt{NULL}$ debe cumplir con que existe $(p, a_1, q) \in \Delta$ con $p \in I$, por construcción del algoritmo. Luego, existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre a_1 que llega al estado q, cumpliéndose el caso base $Inv(1)$.

HI: $Inv(j)$ se cumple, por lo que $\forall p \in Q$ si $H[p] \neq \texttt{NULL}$, entonces, sea $H[p] = i$, existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre $a_i \dots a_j$ que llega al estado p.

TI: Demostremos que $Inv(j+1)$ también se cumple. Para cualquier $q \in Q$, si $H[q] \neq \texttt{NULL}$, entonces por construcción de la función `Find-One` debe existir $(p, a_{j+1}, q) \in \Delta$. Analicemos los siguientes casos:

- $p \notin I$, entonces $H'[p] = i \neq \texttt{NULL}$, por **HI** (considerando que $H[p] \neq \texttt{NULL}$ en la j-ésima iteración) existe, una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre la palabra $a_i \dots a_j$ que llega al estado p. Luego, considerando la relación de transición (p, a_{j+1}, q) se concluye que la ejecución de $\mathcal{A}$ sobre la palabra $a_i \dots a_j a_{j+1}$ llega al estado q, cumpliéndose $Inv(j+1)$.
- $p \in I$, entonces existe una ejecución de $\mathcal{A}$ sobre la palabra a_{j+1} que llega al estado q, cumpliéndose $Inv(j+1)$.

Habiendo demostrado el invariante, podemos concluir que si el algoritmo diseñado retorna un par (i, j), debe de existir en la j-ésima iteración al menos un $H[p] = i \neq \texttt{NULL}$ con $p \in F$, y por el invariante, existe una ejecución sobre la palabra $a_i \dots a_j$ de aceptación en $\mathcal{A}$. De lo contrario, si retorna $\perp$, el algoritmo nunca alcanzó un estado final, quedando demostrado que no existe ninguna ejecución sobre $a_i \dots a_j$ con $1 \leq i, j \leq n$ que fuera de aceptación en $\mathcal{A}$.

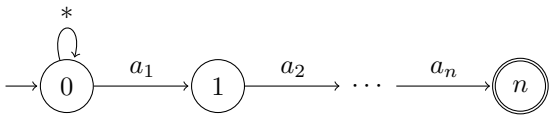
Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por la idea de usar la tabla de Hash $H : Q \to k$ o una estructura parecida.
- **(1 punto)** Por guardar el inicio i de la simulación cuando se llega a un estado inicial.
- **(1 punto)** Por pasar el valor i al siguiente estado de la simulación y por definir la condición de termino.
- **(1 punto)** Por definir el invariante y demostrar la correctitud.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Sea $w = a_1 a_2 \cdots a_n$. $\mathcal{A}_w$ tiene la siguiente forma:



PD: Para todo $i, j \in Q$, $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_j)$, o $\mathcal{L}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$, o $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_j) = \varnothing$.

Sean $i, j \in Q$. Sin perdida de generalidad, vamos a asumir que $i \leq j$.
Sabemos que w puede o puede no cumplir la siguiente propiedad:
$a_1 a_2 \ldots a_i$ es sufijo de $a_1 a_2 \cdots a_j$

Caso 1: w cumple la propiedad.
Supongamos que $a_1 a_2 \ldots a_i$ es sufijo de $a_1 a_2 \cdots a_j$. Vamos a demostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$.
Notemos que $\mathcal{A}_i$ acepta todas las palabras que terminan en $a_1 \cdots a_i$ (1), y $\mathcal{A}_j$ acepta todas las que terminan en $a_1 \cdots a_j$ (2).

Sea $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_j)$. Notemos que, por (2), u tiene la forma $u = v \cdot a_1 \cdots a_j$, con $v \in \Sigma^*$.
Como $a_1 \cdots a_i$ es sufijo de $a_1 \cdots a_j$, tenemos que $a_1 \cdots a_j = v' \cdot a_1 \cdots a_i$.
Por lo tanto, $u = v \cdot v' \cdot a_1 \cdots a_i$.
Finalmente, por (1), $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$, y queda demostrado que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$.

Caso 2: w no cumple la propiedad.
Supongamos que $a_1 a_2 \cdots a_i$ no es sufijo de $a_1 a_2 \cdots a_j$. Vamos a demostrar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_j) = \varnothing$.

Por contradicción: Supongamos que existe una palabra v tal que $v \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_j)$.
Notemos que, como $\mathcal{A}_i$ acepta a v, sabemos que v termina en $a_1 \cdots a_i$.
Además, como $\mathcal{A}_j$ también acepta a v, sabemos que v termina en $a_1 \cdots a_j$.
Por lo tanto, como $i \leq j$, tenemos que $a_1 \cdots a_i$ es sufijo de $a_1 \cdots a_j$. Esto es una contradicción.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por la distinción entre los casos 1 y 2.
- **(1 punto)** Por identificar que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_j) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$ para el caso 1 y que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_i) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_j) = \varnothing$ para el caso 2.
- **(1 punto)** Por la demostración del caso 1.
- **(1 punto)** Por la demostración del caso 2.

Pregunta 2.2

Supongamos que $\mathcal{A}$ es jerárquico. Primero, vamos a demostrar la siguiente propiedad:
Para todo $S \in Q^{\text{det}}$, existe $p \in S$, tal que para todo $q \in Q$, $q \in S$ si y solo si $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$.

Sea $S \in Q^{\text{det}}$, y sea u tal que $\delta^{\text{det}}(\{q_0\}, u) = S$.
Notemos que, para todo $q \in S$, se cumple que $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$. Esto quiere decir que para cualquier par $q_1, q_2 \in S$, se cumple que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_2}) \neq \varnothing$, pues u pertenece a la intersección.
Como $\mathcal{A}$ es jerárquico y $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_2}) \neq \varnothing$, sabemos que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_2})$ o $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_2}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1})$.

Sabiendo esto, vamos a ordenar los estados de S de la siguiente forma:
$S = \{q_1, q_2, \ldots, q_k\}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_2}) \subseteq \cdots \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_k})$.

Sea $p = q_1 \in S$.
PD: para todo $q \in Q$, $q \in S$ si y solo si $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$
Sea $q \in Q$.
($\Rightarrow$): Supongamos que $q \in S$. Por el orden de S, sabemos que $q = q_i \in S$ y que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_1}) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_{q_i})$ para cualquier $q_i \in S$, por lo tanto $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$.

($\Leftarrow$): Supongamos que $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$.
Como $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_p)$, tenemos que $u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$. Por lo tanto, como $\delta^{\text{det}}(\{q_0\}, u) = S$, se cumple que $q \in S$.

Queda demostrada la propiedad.

PD: $|Q^{\text{det}}| \leq |Q|$. Para demostrarlo, vamos a definir una función inyectiva $f : Q^{\text{det}} \to Q$ (sabemos que si f existe y es inyectiva, entonces hay al menos $|Q^{\text{det}}|$ elementos en Q).
Dada la propiedad demostrada anteriormente, se define f así: $f(S) = p$ (el $p \in S$ de la propiedad).

PD (que f es inyectiva): Si $f(S_1) = f(S_2)$ entonces $S_1 = S_2$.
Supongamos que $p = f(S_1) = f(S_2)$. Tenemos que para todo $q \in Q$, se cumple que $q \in S_1$ si y solo si $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$. Además, para todo $q \in Q$, se cumple que $q \in S_2$ si y solo si $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$.
Por lo tanto, tenemos que $q \in S_1$ si y solo si $\mathcal{L}(\mathcal{A}_p) \subseteq \mathcal{L}(\mathcal{A}_q)$ si y solo si $q \in S_2$, o también, que $S_1 = S_2$.

Queda demostrado que $|Q^{\text{det}}| \leq |Q|$.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(1 punto)** Por declarar correctamente la propiedad.
- **(1 punto)** Por identificar que la jerarquía de $\mathcal{A}$ produce un orden para todo $S \in Q^{\text{det}}$.
- **(1 punto)** Por la demostración de la propiedad.
- **(1 punto)** Por la demostración de $|Q^{\text{det}}| \leq |Q|$ utilizando la propiedad.