Pontificia Universidad Católica de Chile
Escuela de Ingeniería
Departamento de Ciencia de la Computación

IIC2223 — Teoría de Autómatas y Lenguajes Formales — 2' 2020

PAUTA TAREA 7

Pregunta 1

Pregunta 2.1

Demostraremos que para todo k, existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ es un lenguaje regular y $\mathcal{G}$ no es LL(k). Para demostrar lo anterior, podemos construir la siguiente gramática $\mathcal{G}$:

$$\begin{aligned} S &\to a^k X \mid a^k Y \\ X &\to b \\ Y &\to c \end{aligned}$$

Es claro que $L(\mathcal{G})$ es un lenguaje regular, pues corresponde a un conjunto finito de palabras, por lo que bastará demostrar que $\mathcal{G}$ no es LL(k). Sabemos que $\mathcal{G}$ será LL(k) si para todas las derivaciones:

- $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot Y \cdot \beta \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot \gamma_1 \cdot \beta \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot v_1$
- $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot Y \cdot \beta \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot \gamma_2 \cdot \beta \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot v_2$
- $v_1|_k = v_2|_k$

Se cumple que $\gamma_1 = \gamma_2$. Observando nuestra gramática, podemos considerar:

- $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot S \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} \varepsilon \cdot a^k X \cdot \varepsilon \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot a^k b$
- $S \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot S \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} \varepsilon \cdot a^k Y \cdot \varepsilon \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} \varepsilon \cdot a^k c$

Es claro que $v_1 = a^k b$ y $v_2 = a^k c$, por lo que $v_1|_k = v_2|_k = a^k$. Sin embargo, observando los γ, tendremos $\gamma_1 = a^k X \neq a^k Y = \gamma_2$, lo que significa que $\mathcal{G}$ no es LL(k). Por lo anterior, para todo k, existirá $\mathcal{G}$ tal que $\mathcal{L}(\mathcal{G})$ es regular y $\mathcal{G}$ no es LL(k).

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(4 puntos)** Por encontrar una gramática que define un lenguaje regular, para todo k y demostrar que no es LL(k).
- **(3 puntos)** Por encontrar la gramática y completar la demostración con errores menores.
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 2.2

Demostraremos que para todo lenguaje regular L, existe una gramática libre de contexto $\mathcal{G}$ tal que $L = \mathcal{L}(\mathcal{G})$ y $\mathcal{G}$ es LL(k) para algún k. Dado que el lenguaje L es regular, sabemos que existirá un DFA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ tal que $L = \mathcal{L}(A)$; por lo que podemos construir la siguiente gramática $\mathcal{G} = (Q, \Sigma, P, \{q_0\})$ a partir de A con

$$P \;=\; \{p \to aq \mid p, q \in Q,\, a \in \Sigma \wedge \delta(p, a) = q\} \;\cup\; \{p \to \varepsilon \mid p \in F\}$$

Como se vio en clases, esta gramática definirá el mismo lenguaje que el autómata en el que se basa, es decir $L = \mathcal{L}(A) = \mathcal{L}(\mathcal{G})$, por lo que ahora debemos demostrar que existe un k tal que $\mathcal{G}$ es LL(k). Para esto, consideremos las derivaciones:

- $S = q_0 \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot q \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot a_1 q_1 \cdot \varepsilon \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot v_1$
- $S = q_0 \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot q \cdot \varepsilon \underset{lm}{\Longrightarrow} u \cdot a_2 q_2 \cdot \varepsilon \underset{lm}{\overset{*}{\Longrightarrow}} u \cdot v_2$

Entonces, para demostrar que $\mathcal{G}$ es LL(k), debemos demostrar que si $v_1|_k = v_2|_k$ entonces $a_1 q_1 = \gamma_1 = \gamma_2 = a_2 q_2$. Considerando $k = 1$, tendremos que $v_1|_1 = v_2|_1$, esto es, $a_1 = a_2$. Luego, como $\mathcal{G}$ está hecha en base a un DFA, sabemos que para un par estado-letra $(q' - a')$ existirá una única transición dada por $\delta(q', a') = q''$, lo que a su vez significa que la gramática tendrá una única producción que a partir de la variable q' entregará la letra a' y esta siempre producirá $a'q''$. Aplicando esto a las derivaciones anteriores, dado que tenemos $a_1 = a_2$ obtenidos a partir de una misma variable q, necesariamente se cumplirá que $q_1 = q_2$, lo que significa que $a_1 q_1 = a_2 q_2$ y $\gamma_1 = \gamma_2$ Por tanto, $\mathcal{G}$ es LL(1).

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(4 puntos)** Por encontrar una gramática, para todo lenguaje regular, y demostrar que es LL(k) para algún k.
- **(3 puntos)** Por encontrar la gramática y completar la demostración con errores menores.
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 2

Pregunta 2.1

Una gramática que cumple lo pedido es:

$$\begin{array}{rcl} S & \to & aX \\ X & \to & XX \mid \varepsilon \end{array}$$

No es difícil ver que la única palabra que puede producir esta gramática es a, por ende produce un lenguaje finito. Se puede probar que aX^n es un prefijo reducible para todo $n > 0$ con handle $X \to XX$.

Ahora notemos que también estos son prefijos viable pues para cada uno de ellos existe una derivación más a la derecha tal que el lado derecho de la derivación corresponde a X^n o aX^n, de acá se concluye que el lenguaje del autómata característico de esta gramática es infinito.

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(4 puntos)** Por dar una gramática que cumple lo pedido y demostrar que lo cumple.
- **(3 puntos)** Por dar una gramática que cumple lo pedido
- **(0 puntos)** En otro caso.

Pregunta 2.2

Ahora podemos considerar la gramática dada por:

$$S \rightarrow Sa \mid a$$

Esta gramática corresponde al lenguaje $L = \{a^n : n \geq 0\}$, el cual es infinito. Se puede ver que los prefijos viables que son reducibles en esta gramática son solamente a y Sa

Dado lo anterior, la distribución de puntaje es la siguiente:

- **(4 puntos)** Por dar una gramática que cumple lo pedido y demostrar que lo cumple.
- **(3 puntos)** Por dar una gramática que cumple lo pedido.
- **(0 puntos)** En otro caso.