PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2026

Interrogación 3 - MAT1203

1. Las matrices que se muestran a continuación son equivalentes por filas.

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -9 & 11 & -8 \\ 1 & 5 & 3 & 1 & 5 \\ -3 & -5 & 16 & -18 & 15 \\ 4 & 10 & -13 & 19 & -10 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 & 4 & -1 \\ 0 & 2 & 5 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

   a) Determine el rango de A y la dimensión de $\text{Nul}(A)$.

   b) Encuentre bases para $\text{Col}(A)$ y $\text{Fil}(A)$.

Solución:

a) Como A y B son equivalentes por filas, tienen el mismo rango. Observamos que la matriz B tiene dos filas no nulas, por lo tanto

$$\text{Rango}(A) = 2.$$

Además, como A tiene 5 columnas, por el teorema del rango se tiene que

$$\dim(\text{Nul}(A)) = 5 - \text{Rango}(A) = 5 - 2 = 3.$$

b) Para determinar una base de $\text{Col}(A)$, observamos que las columnas con pivote en B son la primera y la segunda. Por lo tanto, una base para $\text{Col}(A)$ está dada por las columnas correspondientes de la matriz original A:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 4 \\ 5 \\ -5 \\ 10 \end{bmatrix} \right\}.$$

Para determinar una base de $\text{Fil}(A)$, usamos que las filas no nulas de una forma escalonada de A forman una base para el espacio fila. Como A y B son equivalentes por filas, una base para $\text{Fil}(A)$ está dada por

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \\ 4 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ 5 \\ -3 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Identifica que el rango de A es el mismo que el rango de B.
C2	1 punto	Determina correctamente el rango de A.
C3	1 pto	Determina correctamente $\dim(\text{Nul}(A))$ usando el teorema del rango.
C4	1 pto	Identifica correctamente las columnas pivote de la forma escalonada.
C5	1 pto	Determina correctamente una base para $\text{Col}(A)$ usando las columnas correspondientes de la matriz original.
C6	1 pto	Determina, eligiendo las filas no nulas, correctamente una base para $\text{Fil}(A)$.

2. Sea $T : \mathbb{P}_1 \to \mathbb{P}_2$ la transformación definida por

$$T(a + bt) = (a + b) + (a - b)t + bt^2.$$

Considere las bases $\mathcal{B} = \{1 + t,\ 1 - t\}$ de $\mathbb{P}_1$ y $\mathcal{C} = \{1,\ t + 2,\ t^2\}$ de $\mathbb{P}_2$.

a) Demuestre que T es una transformación lineal.

b) Determine la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$.

c) Determine el polinomio $p(t) \in \mathbb{P}_2$ tal que

$$[p(t)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -17 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Solución:

a) Sean $p(t) = a + bt$, $q(t) = c + dt$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Entonces

$$p(t) + q(t) = (a + c) + (b + d)t.$$

Luego,

$$\begin{aligned} T(p(t) + q(t)) &= (a + c + b + d) + (a + c - b - d)t + (b + d)t^2. \\ &= (a + b) + (a - b)t + bt^2 + (c + d) + (c - d)t + dt^2, \\ &= T(p(t)) + T(q(t)). \end{aligned}$$

Además,

$$T(\lambda p(t)) = T(\lambda a + \lambda bt) = \lambda(a + b) + \lambda(a - b)t + \lambda bt^2 = \lambda T(p(t)).$$

por lo tanto T es una transformación lineal.

b) Para determinar la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$, calculamos la imagen de los elementos de $\mathcal{B}$.

Primero,

$$T(1+t) = 2 + t^2.$$

Buscamos sus coordenadas en la base $\mathcal{C}$:

$$2 + t^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(t+2) + \gamma t^2.$$

De aquí se obtiene

$$\beta = 0, \qquad \gamma = 1, \qquad \alpha = 2.$$

Por lo tanto,

$$[T(1+t)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Ahora,

$$T(1-t) = 2t - t^2.$$

Buscamos sus coordenadas en la base $\mathcal{C}$:

$$2t - t^2 = \alpha \cdot 1 + \beta(t+2) + \gamma t^2.$$

De aquí se obtiene

$$\beta = 2, \qquad \gamma = -1, \qquad \alpha = -4.$$

Por lo tanto,

$$[T(1-t)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -4 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Así, la matriz de T respecto de las bases $\mathcal{B}$ y $\mathcal{C}$ es

$$[T] = \begin{bmatrix} 2 & -4 \\ 0 & 2 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}.$$

c) Como

$$[p(t)]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} -17 \\ 7 \\ -3 \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$p(t) = -17 \cdot 1 + 7(t+2) - 3t^2.$$

Luego,

$$p(t) = -17 + 7t + 14 - 3t^2.$$

Por lo tanto,

$$p(t) = -3 + 7t - 3t^2.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Verifica correctamente que $T(p+q) = T(p) + T(q)$.
C2	1 pto	Verifica correctamente que $T(\lambda p) = \lambda T(p)$ y concluye que T es lineal.
C3	1 pto	Determina correctamente $[T(1+t)]_{\mathcal{C}}$.
C4	1 pto	Determina correctamente $[T(1-t)]_{\mathcal{C}}$ y construye la matriz asociada.
C5	1 pto	Interpreta correctamente el vector coordenado de $p(t)$ en la base $\mathcal{C}$.
C6	1 pto	Determina correctamente el polinomio $p(t) = -3+7t-3t^2$.

3. Sea A una matriz tal que $A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}$ y que $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$ pertenece al $\text{Nul}(A)$.

   a) Determine bases para el $\text{Nul}(A)$ y $\text{Col}(A)$.

   b) Determine una diagonalización de A.

   c) Calcule A^9.

Solución:

a) Como

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} = -2\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix}$$

es un vector propio asociado al valor propio -2.

Además, como

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \in \text{Nul}(A),$$

se tiene que

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$\text{Nul}(A) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Así, una base para $\text{Nul}(A)$ es

$$\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right\}.$$

Como

$$A\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix},$$

se tiene que un vector no nulo que pertenece a $\mathrm{Col}(A)$ es

$$\begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Como además $\mathrm{Nul}(A)$ tiene dimensión 1, por el teorema del rango se tiene que

$$\dim(\mathrm{Col}(A)) = 1.$$

Por lo tanto, una base para $\mathrm{Col}(A)$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} -2 \\ 6 \end{bmatrix} \right\}.$$

b) Del inciso anterior tenemos dos vectores propios linealmente independientes:

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -3 \end{bmatrix} \quad \text{asociado a} \quad \lambda = -2,$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \quad \text{asociado a} \quad \lambda = 0.$$

Por lo tanto, A es diagonalizable. Tomando

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}, \qquad D = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

se tiene que

$$A = PDP^{-1}.$$

c) Como

$$A = PDP^{-1},$$

entonces

$$A^9 = PD^9P^{-1}.$$

Además,

$$D^9 = \begin{bmatrix} (-2)^9 & 0 \\ 0 & 0^9 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -512 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Como

$$P^{-1} = \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix},$$

obtenemos

$$A^9 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -512 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \frac{1}{5} \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Determina correctamente una base para $\text{Nul}(A)$.
C2	1 pto	Determina correctamente una base para $\text{Col}(A)$.
C3	1 pto	Reconoce correctamente los valores propios y vectores propios dados por el enunciado.
C4	1 pto	Determina correctamente matrices P y D coherentes entre sí.
C5	1 pto	Usa correctamente que $A^9 = PD^9P^{-1}$.
C6	1 pto	Determina correctamente D^9 y deja explícito el producto para A^9.

4. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{P}_1$ a $\mathbb{P}_1$ cuya $\mathcal{B}$-matriz respecto a la base $\mathcal{B} = \{1, t\}$ es

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Determine una fórmula para $T(a + bt)$.

b) Encuentre una base $\mathcal{C}$ de manera que la $\mathcal{C}$-matriz de la transformación sea diagonal.

Solución:

a) Como $\mathcal{B} = \{1, t\}$, se tiene que

$$[a + bt]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}.$$

Luego,

$$[T(a + bt)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a + b \\ -2a + 4b \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$T(a + bt) = (a + b) + (-2a + 4b)t.$$

b) Para encontrar una base $\mathcal{C}$ de modo que la $\mathcal{C}$-matriz de la transformación sea diagonal, diagonalizamos la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 4 \end{bmatrix}.$$

Calculamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 1 \\ -2 & 4 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)(4 - \lambda) + 2.$$

Luego,

$$\det(A - \lambda I) = \lambda^2 - 5\lambda + 6 = (\lambda - 2)(\lambda - 3).$$

Por lo tanto, los valores propios son

$$\lambda = 2 \qquad \text{y} \qquad \lambda = 3.$$

Para $\lambda = 2$,

$$A - 2I = \begin{bmatrix} -1 & 1 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}.$$

De aquí se obtiene $x = y$, por lo que un vector propio asociado a $\lambda = 2$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Este vector coordenado corresponde al polinomio

$$1 + t.$$

Para $\lambda = 3$,

$$A - 3I = \begin{bmatrix} -2 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De aquí se obtiene $y = 2x$, por lo que un vector propio asociado a $\lambda = 3$ es

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Este vector coordenado corresponde al polinomio

$$1 + 2t.$$

Por lo tanto, una base que diagonaliza a la transformación es

$$\mathcal{C} = \{1 + t,\ 1 + 2t\}.$$

En esta base,

$$[T]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1 pto	Determina correctamente el vector coordenado de $a+bt$ en la base $\mathcal{B}$.
C2	1 pto	Calcula correctamente $[T(a + bt)]_{\mathcal{B}}$.
C3	1 pto	Determina correctamente la fórmula de $T(a + bt)$.
C4	1 pto	Determina correctamente los valores propios de la matriz asociada.
C5	1 pto	Determina correctamente vectores propios asociados a cada valor propio.
C6	1 pto	Construye correctamente una base $\mathcal{C}$ y la matriz diagonal asociada.