1. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que la matriz respecto a las bases $\mathcal{B} = \{1+x, 1-x, x^2\}$ en $\mathbb{P}_2$ y $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} \right\}$ es

$$[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

a) Determine $T(3x^2 - 2x + 4)$.

b) Determine el núcleo de la transformación.

a) Para determinar $T(3x^2-2x+4)$, debemos encontrar $[3x^2-2x+4]_{\beta}$, para esto supongo que:

$$\alpha(1+x) + \beta(1-x) + \gamma x^2 = 3x^2 - 2x + 4$$

$$\Rightarrow \begin{array}{l} \alpha+\beta = 4 \\ \alpha-\beta = -2 \\ \gamma = 3 \end{array} \Rightarrow \alpha = 1 \quad \beta = 3$$

$$\therefore [3x^2-2x+4]_{\beta} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\therefore [T]_{\beta}^{\mathcal{C}} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$\therefore T(3x^2-2x+4) = 2\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 10 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

b)

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Nul } [T] = \text{Gen}\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\therefore \quad \text{Nul}(T) = \text{Gen}\{ 1(1+x) - 1(1-x) + 1x^2 \}$$

$$= \text{Gen}\{ 2x + x^2 \}$$

1 pto x calcular $[3x^2 - 2x + 4]_{\mathcal{B}}$

1 pto x el producto de $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} [3x^2 - 2x + 4]_{\mathcal{B}}$

1 pto x determinar $v \in \mathbb{R}^2$ tq $[v]_{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$

1 pto x determinar Nul ([T])

2 ptos x determinar Nul (T)

2. Determine si la matriz

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 3 & -3 & 2 \end{bmatrix}$$

es diagonalizable, en caso de serlo encuentre una diagonalización, en caso contrario justifique claramente porqué no se puede diagonalizar.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} -1-\lambda & 3 & 0 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 3 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= (2-\lambda) \begin{vmatrix} (-1-\lambda) & 0 \\ 3 & 2-\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -(2-\lambda)^2(1+\lambda)$$

$$\therefore \quad P_A(\lambda) = 0 \iff \lambda = 2 \text{ o } \lambda = -1$$

$$E_2 = Nul \begin{pmatrix} -3 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 3 & -3 & 0 \end{pmatrix} = gen \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{-1} = \text{Nul}\begin{pmatrix} 0 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 3 & -3 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$= \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\dim(E_2) + \dim(E_{-1}) = 3$$

$\therefore$ A diagonalizable.

$$D = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

1 pto x valores propios
1 pto x E_2
1 pto x E_{-1}
1 pto x D
1 pto x P
1 pto x Coherencia en el orden de las columnas de D y P.

3. Sea $A = \begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$. Encuentre P de 2×2 y C de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que $A = PCP^{-1}$.

$$P_A(\lambda) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & -3 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(1-\lambda) + 3$$

$$= \lambda^2 - 4\lambda + 6$$

$$= (\lambda - 2)^2 + 2$$

$$\lambda = 2 \pm \sqrt{2}i$$

Valores propios $\lambda_1 = 2 - \sqrt{2}i$ $\lambda_2 = 2 + \sqrt{2}i$

1 pto x polinomio

1 pto x valores propios

$$E_{\lambda_1} = \text{Nul} \begin{pmatrix} 1+\sqrt{2}i & -3 \\ 1 & -1+\sqrt{2}i \end{pmatrix}$$

2 pto x espacio propio

$$= \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1-\sqrt{2}i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

1 pto x P

1 pto x C

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \quad y \quad C = \begin{bmatrix} 2 & -\sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 2 \end{bmatrix}$$

4. Encuentre la ecuación $y = \alpha + \beta x$ de la recta de mínimos cuadrados que mejor se ajuste a los puntos

$$(2,3), (3,2), (5,1), (6,0).$$

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{bmatrix} \qquad b = \begin{bmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Solución de mínimos cuadrados de

$$Ax = b$$

$\Rightarrow$ Resolver $A^TAx = A^Tb$

$$A^TA = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \\ 1 & 5 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4 & 16 \\ 16 & 74 \end{pmatrix}$$

$$A^T b = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$(A^T A)^{-1} = \frac{1}{40} \begin{bmatrix} 74 & -16 \\ -16 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow (A^T A^{-1}) A^T b = \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 74 & -16 \\ -16 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 \\ 17 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{40} \begin{pmatrix} 172 \\ -28 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{43}{10} \\ -\frac{7}{10} \end{pmatrix}.$$

1 pto por matriz A
1 pto plantear ecuación
1 pto por $A^T A$
1 pto por $A^T b$
1 pto por resolver $A^T A x = A^T b$
1 pto x dar la recta

∴ la recta es $\frac{43}{10} - \frac{7}{10} x = y$.

5. Considere la forma cuadrática $Q(x, y) = x^2 - 6xy + 9y^2$.

a) Clasifique la forma cuadrática.

b) Realice un cambio de variable $x = Py$ de modo que la forma cuadrática no tenga productos cruzados.

La matriz asociada es

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \quad P_A(\lambda) = 0 \iff (1-\lambda)(9-\lambda) - 9 = 0$$

$$\iff 9 - 10\lambda + \lambda^2 - 9 = 0$$

$$\iff \lambda = 10 \text{ o } \lambda = 0$$

$\therefore$ la forma cuadrática es semipositiva definida.

Para hacer el cambio de variable debemos determinar E_0 y E_{10}

$$E_0 = \text{Nul} \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ -3 & 9 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Gen} \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$E_{10} = \text{Nul}\begin{pmatrix} -9 & -3 \\ -3 & -1 \end{pmatrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \text{Gen}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\therefore P = \begin{bmatrix} 3/\sqrt{10} & 1/\sqrt{10} \\ 1/\sqrt{10} & -3/\sqrt{10} \end{bmatrix}$$

Así el cambio es $x = Py$

y la forma cuadrática queda

$$Q(y) = 10\, y_2^2$$

1pto x matriz
1pto x valores propios
1 pto x clasificación
0.5 x E_0
0.5 x E_{10}
1 x P
1 x forma cuadrática (que sea coherente)