PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Interrogación 3 - MAT1203

1. Sea $\mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado menor o igual a 2 y sean

$$\mathcal{B} = \{1 + t^2,\ t - 3t^2,\ 1 + t - 3t^2\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \{1 + t,\ 1 - t,\ t^2\}$$

bases de $\mathbb{P}_2$.

a) Determine $[2 + 2t - 4t^2]_{\mathcal{B}}$.

b) Determine la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$, es decir $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

Solución:

a) Buscamos $a, b, c \in \mathbb{R}$ tales que:

$$2 + 2t - 4t^2 = a(1 + t^2) + b(t - 3t^2) + c(1 + t - 3t^2).$$

Desarrollando:

$$a(1 + t^2) + b(t - 3t^2) + c(1 + t - 3t^2) = (a + c) + (b + c)t + (a - 3b - 3c)t^2.$$

Igualamos los coeficientes con $2 + 2t - 4t^2$:

$$\begin{cases} a + c = 2, \\ b + c = 2, \\ a - 3b - 3c = -4. \end{cases}$$

De las dos primeras ecuaciones $a = 2 - c$ y $b = 2 - c$, sustituyendo en la tercera:

$$(2 - c) - 3(2 - c) - 3c = -4 \Rightarrow -4 - c = -4 \Rightarrow c = 0.$$

Entonces $a = 2$, $b = 2$. Por lo tanto:

$$[2 + 2t - 4t^2]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

b) Queremos expresar cada vector de $\mathcal{B}$ en coordenadas de $\mathcal{C}$.

$$\mathcal{C} = \{1 + t,\ 1 - t,\ t^2\}.$$

Si $p(t) = \alpha(1+t) + \beta(1-t) + \gamma t^2$, entonces

$$p(t) = (\alpha+\beta) + (\alpha-\beta)t + \gamma t^2.$$

Primer vector: $b_1 = 1 + t^2$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta = 0, \\ \gamma = 1. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = \tfrac{1}{2},\ \gamma = 1.$$

$$[b_1]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Segundo vector: $b_2 = t - 3t^2$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 0, \\ \alpha - \beta = 1, \\ \gamma = -3. \end{cases} \Rightarrow \alpha = \tfrac{1}{2},\ \beta = -\tfrac{1}{2},\ \gamma = -3.$$

$$[b_2]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Tercer vector: $b_3 = 1 + t - 3t^2$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1, \\ \alpha - \beta = 1, \\ \gamma = -3. \end{cases} \Rightarrow \alpha = 1,\ \beta = 0,\ \gamma = -3.$$

$$[b_3]_{\mathcal{C}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & 0 \\ 1 & -3 & -3 \end{bmatrix}.$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Plantea correctamente el sistema para $[p]_{\mathcal{B}}$.
C2	1.5 ptos	Obtiene las coordenadas.
C3	1.5 ptos	Expresa correctamente los vectores de $\mathcal{B}$ en coordenadas de $\mathcal{C}$.
C4	2 ptos	Determina correctamente $P_{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}$.

2. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}.$$

a) Diagonalice A.

b) Determine A^{911}.

Solución.

a) Buscamos los valores propios resolviendo el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3-\lambda & 2 \\ -4 & -3-\lambda \end{vmatrix} = (3-\lambda)(-3-\lambda) + 8 = \lambda^2 - 1$$

Por lo tanto, los valores propios son:

$$\lambda_1 = 1, \quad \lambda_2 = -1$$

Para $\lambda = 1$:

$$A - I = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ -4 & -4 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Sistema: } x + y = 0 \Rightarrow \vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Para $\lambda = -1$:

$$A + I = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ -4 & -2 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Sistema: } 2x + y = 0 \Rightarrow \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entonces la matriz de cambio de base P y la matriz diagonal D son:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Como $A = PDP^{-1}$, entonces:

$$A^{911} = PD^{911}P^{-1}$$

b) Como

$$D^{911} = \begin{bmatrix} 1^{911} & 0 \\ 0 & (-1)^{911} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = D \Rightarrow A^{911} = PDP^{-1} = A$$

Por lo tanto,

$$A^{911} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Plantea correctamente la ecuación característica.
C2	1 pto	Determina los valores propios.
C3	1 pto	Determina vectores propios.
C4	1 pto	Determina D
C5	1 pto	Determina P^{-1}.
C6	1 pto	Determina A^{911}.

3. Sea A una matriz de 3×3 con dos valores propios $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = -2$ y cuyos espacios propios respectivos son

$$E_1 \text{ la recta generada por el vector } \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \text{ y } E_{-2} \text{ el plano de ecuación } x + y + z = 0.$$

Determine si la matriz A es diagonalizable, en caso afirmativo determine una diagonalización. En caso contrario justifique claramente porque A no es diagonalizable.

Solución:

a) Como la dimensión de E_1 es 1 y la de E_{-2} es 2, la suma de las dimensiones de los espacios propios es 3 que coincide con el tamaño de la matriz. Por lo tanto, A es diagonalizable.

b) Una base de vectores propios es:

$$\vec{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \vec{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Con esta base tenemos que:

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \quad \text{y la matriz diagonal es} \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Finalmente, se tiene la diagonalización:

$$A = PDP^{-1}$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Determinar que el espacio propio asociado al valor propio -2 tiene dimensión 2.
C2	2 pto	Justificar que la matriz es diagonalizable.
C3	1 pto	Determinar base de E_{-2}.
C4	1 pto	Por construir P.
C5	1 pto	Por determinar D.

4. Sea

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 0 & -3 & -2 \end{bmatrix}$$

a) Determine una base para $Nul(A)$.

b) Si A es la matriz de una transformación lineal de $T : \mathbb{P}_2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ respecto a la base $\mathcal{B} = \{1+t, -t, t^2\}$ en $\mathbb{P}_2$ y la base canónica en $\mathbb{R}^3$, determine una base para el subespacio de polinomios $p(t)$ tales que $T(p(t)) = 0$ y calcule la dimensión de la imagen de T.

Solución:

a) Queremos resolver el sistema homogéneo $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$, es decir:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ 2x_1 - x_2 = 0 \\ -3x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$$

De la segunda ecuación:

$$2x_1 - x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = 2x_1$$

Sustituyendo en la primera:

$$x_1 + 2x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow 3x_1 + x_3 = 0 \Rightarrow x_3 = -3x_1$$

Por lo tanto, la solución general es:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = x_1 \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow \text{Nul}(A) = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \right\}$$

b) Sabemos que si:

$$[p(t)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -3 \end{bmatrix} \Rightarrow p(t) = 1 \cdot (1+t) + 2 \cdot (-t) + (-3) \cdot t^2$$

Entonces:

$$p(t) = 1 + t - 2t - 3t^2 = 1 - t - 3t^2$$

Base del subespacio de polinomios $p(t)$ tales que $T(p(t)) = 0$:

$$\boxed{\left\{1 - t - 3t^2\right\}}$$

Dimensión de la imagen de T:
Sabemos que $\dim(\mathbb{P}_2) = 3$ y que el núcleo de T tiene dimensión 1. Por el teorema del rango:

$$\dim(\text{Im}(T)) = \dim(\mathbb{P}_2) - \dim(\ker(T)) = 3 - 1 = \boxed{2}$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Plantea correctamente el sistema asociado al problema.
C2	2 pto	Determina una base del Nul(A)
C3	2 pto	Por determinar base del Nul de la transformación
C4	1 pto	Determina justificadamente la dimensión de la imagen