PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Interrogación 3 - MAT1203

1. Sean $\mathcal{B} = \{x^2+1, x-2, 2x+1\}$ y $\mathcal{C}$ bases del espacio $\mathbb{P}_2$, de polinomios de grado menor o igual a dos y sea

$$\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

la matriz cambio de base de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$. Determine la base $\mathcal{C}$.

Solución:

Sabemos que $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1}$, entonces lo primero que haremos será invertir la matriz

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

para esto realizaremos el algoritmo de Gauss-Jordan, obteniendo que:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\sim \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

De esta forma tenemos que

$$\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

por lo tanto si $\mathcal{C} = \{c_1, c_2, c_3\}$ tenemos que

- $c_1 = 2(x^2+1) + 0(x-2) - 1(2x+1)$
- $c_2 = -1(x^2+1) + 1(x-2) + 0(2x+1)$
- $c_3 = -1(x^2+1) + 0(x-2) + 1(2x+1)$

de lo anterior tenemos que $\mathcal{C} = \{2x^2 - 2x + 1, -x^2 + x - 3, -x^2 + 2x\}$.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	Por saber que $\underset{\mathcal{B}\leftarrow\mathcal{C}}{P} = \left(\underset{\mathcal{C}\leftarrow\mathcal{B}}{P}\right)^{-1}$.
C2	**2 ptos**	Por determinar la inversa.
C3	**1 pto**	Por determinar c_1.
C4	**1 pto**	Por determinar c_2.
C5	**1 pto**	Por determinar c_3.

2. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal cuya matriz asociada respecto a las bases $\mathcal{B} = \{x^2, 1+x, 1-x\}$ en $\mathbb{P}_2$ y $\mathcal{C} = \left\{ \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$ respectivamente es:

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix}.$$

a) Determine $T\left(2x^2 - 4x - 2\right)$.
Solución:

Para determinar la imagen de $p(x) = 2x^2 - 4x - 2$ debemos determinar $[p(x)]_{\mathcal{B}}$, para esto expresamos el polinomio en la base $\mathcal{B}$:

$$2x^2 - 4x - 2 = ax^2 + b(1+x) + c(1-x)$$

$$= ax^2 + b + bx + c - cx = ax^2 + (b+c) + (b-c)x$$

Igualando coeficientes tenemos que

$$\begin{cases} a = 2 \\ b - c = -4 \\ b + c = -2 \end{cases} \Rightarrow b = -3, \quad c = 1$$

Entonces, las coordenadas en la base $\mathcal{B}$ son:

$$[p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sabemos que $[T(p(x))]_{\mathcal{C}} = [T] \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$, haciendo este cálculo tenemos que

$$[T][p(x)]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-6-1 \\ 2-3+1 \\ 4-3+4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -5 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$$

lo anterior corresponde a la imagen de $p(x)$ en coordenadas de la base $\mathcal{C}$, así que reconstruimos el vector en base canónica obtenemos:

$$T(2x^2 - 4x - 2) = -5 \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + 0 \begin{bmatrix}1\\1\\1\end{bmatrix} + 5 \begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-5\\0\\-5\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}5\\0\\-5\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\0\\-10\end{bmatrix}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por determinar el vector coordenado de $p(x)$
C2	**1 pto**	Por determinar el vector coordenado de la imagend e $p(x)$.
C3	**1 pto**	Por determinar la imagen de $p(x)$

b) Determine una base para el núcleo de T.

Solución:

Para determinar una base del núcleo e T lo primero que haremos es determinar una base del Nul($[T]$), para esto escalonamos la matriz obteniendo que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -3 & 6 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

obteniendo que una base para el Nul($[T]$) es $\left\{ \begin{bmatrix} -3 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$ por lo que una base para el núcleo de la transformación está formada por el polinomio $-3x^2+2(1+x)+1(1-x) = -3x^2+x+3$.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C4	**1 pto**	Por determinar una base para el Nul($[T]$)
C5	**1 pto**	Por determinar base para el núcleo de la transformación..

c) Determine la dimensión de la imagen de T.

Solución:

La dimensión de la imagen es igual al rango de la matriz y del inciso anterior tenemos que la dimensión del Nul($[T]$) es 1, por el teorema del rango tenemos entonces que la dimensión de la imagen es 2.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C6	**1 pto**	Por determinar, justificadaemnte que la dimensión de la imagen es dos.

3. Diagonalice la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Solución:

Calculamos el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} -\lambda & -1 & -1 \\ 1 & 2-\lambda & 1 \\ -1 & -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

Aplicamos cofactores por la primera fila:

$$= -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} - (-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 1 & 2-\lambda \\ -1 & -1 \end{vmatrix} = -\lambda \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -1 & -\lambda \end{vmatrix}$$

por lo tanto el polinomio característico es

$$P_A(\lambda) = -\lambda(\lambda - 1)^2$$

Ahora encontramos los espacios propios:

$$E_0 = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \right) = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

$$E_1 = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \right) = \text{Gen}\left\{ \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right\}$$

por lo tanto una diagonalización está dada por $D = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y $P = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	Por determinar polinomio característico.
C2	**1 pto**	Por determinar valores propios.
C3	**1 pto**	Por determinar E_0.
C4	**1 pto**	Por determinar E_1.
C5	**1 pto**	Por determinar D
C6	**1 pto**	Por determinar P en coherencia con als entradas de D.

4. Encuentre una matriz P invertible y una matriz C de la forma $\begin{bmatrix} a & -b \\ b & a \end{bmatrix}$ tal que

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} = PCP^{-1}$$

Solución:

Partiremos encontrando el polinomio característico:

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ -2 & -\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(-\lambda) + 2 = -2\lambda + \lambda^2 + 2 = \lambda^2 - 2\lambda + 2.$$

Resolviendo:

$$\lambda = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4(1)(2)}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-4}}{2} = 1 \pm i.$$

Sea $\lambda = 1 + i$. Determinamos los vectores propios asociados a dicho valor propio resolviendo

$$(A - (1+i)I)v = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 0 \end{bmatrix} - (1+i) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} 1-i & 1 \\ -2 & -1-i \end{bmatrix}.$$

$$(1-i)x + y = 0 \quad \Rightarrow \quad y = -(1-i)x.$$

Entonces un vector propio es:

$$v = \begin{bmatrix} 1 \\ -(1-i) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1+i \end{bmatrix}.$$

Tomando la parte real e imaginaria de v obtenemos als columnas de la matriz P

$$\mathrm{Re}(v) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{Im}(v) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Entonces tenemos que

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Como consideramos el valor propio $\lambda = 1+i$, la matriz $C = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. **Criterio de evaluación.**

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	Por determinar polinomio característico.
C2	**1 pto**	Por determinar valores propios.
C3	**1.5 pto**	Por determinar C
C4	**1.5 pto**	Por determinar espacio propio asociado a un valor propio.
C5	**1 pto**	Por construir P