PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Interrogación 3 - MAT1203

1. Considere $\mathcal{M}_{2\times 2}$ el espacio de matrices de 2×2 con coeficientes reales y H el subconjunto definido por

$$H = \left\{ A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A = A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right\}$$

a) Demuestre que H es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.
Solución:

Observe que:

i) La matriz $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H$ ya que

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

ii) Si A y $B \in H$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (A+B) &= \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} B \\ &= A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} + B \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \\ &= (A+B) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto si $A, B \in H$ entonces $(A+B) \in H$.

iii) Si $A \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ tenemos que

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} (\alpha A) &= \alpha \left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} A \right) \\ &= \alpha \left(A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \right) \\ &= (\alpha A) \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

por lo tanto si $A \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$ entonces $\alpha A \in H$.

De i), ii) y iii) tenemos que H es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

Distribución de puntajes:

- (0.5 puntos) por determinar que H es no vacío.
- (1punto) por determinar que H es cerrado bajo la suma.
- (1 punto) por determinar que H es cerrado bajo la ponderación.
- (0.5 punto) por concluir.

b) Encuentre una base para H y determine la dimensión.
Solución:

Observe que la matriz $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ pertenece a H si y solo si

$$\begin{bmatrix} a-b & 2a+b \\ c-d & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ -a+c & -b+d \end{bmatrix}$$

lo que equivale a que $a = d$ y que $b = -2c$, por lo tanto A debe ser de la forma

$$A = \begin{bmatrix} a & -2c \\ c & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + c \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto el conjunto $\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$ genera H, como además es linealmente independiente es una base para H, luego H tienen dimensión 2.
Distribución de puntajes:

- (1punto) por determinar generadores.
- (1 punto) por decir que es l.i.
- (1 punto) por concluir la dimensión.

2. Sea $T : \mathbb{P}_2 \to \mathbb{P}_2$ la transformación lineal definida por $T(ax^2 + bx + c) = 2ax^2 + bx$.

a) Determine el espacio nulo (núcleo o kernel) de la transformación.
Solución:

Observe que $p(x) = ax^2+bx+c$ pertenece al espacio nulo si y sólo si $T(p(x) = 2ax^2+bx = 0$, es decir si $a = 0$ y $b = 0$, por lo tanto el espacio nulo es el conjutno de polinomios constantes.
Distribución de puntajes:

- (1punto) por conocer la definición del espacio nulo.
- (2 punto) por determinar el espacio nulo.

b) Escriba el rango o imagen de T como conjunto generado.
Solución:

El rango de T es el conjunto de las imágenes de la función, luego es el conjunto de polinomios de la forma $p(x) = 2ax^2 + bx$ es decir el conjunto generado por x y x^2.

Distribución de puntajes:

- (1punto) por conocer la definición del rango
- (1 punto) por descripción del rango.
- (1 punto) por determinar generadores.

.

3. Considere $\mathbb{P}_1 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, el espacio de polinomios de grado menor o igual a uno y sean $\mathcal{B} = \{1 + x, 1 - 2x\}$ y $\mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$ bases para $\mathbb{P}_1$. Si la matriz

$$P = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$. Determine w_1 y w_2.

Solución:
Ya que la matriz P es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a $\mathcal{C}$ tenemos que P^{-1} es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$, esto quiere decir que

$$P^{-1}[p(x)]_{\mathcal{C}} = [p(x)]_{\mathcal{B}} \text{ para todo polinomio en } \mathbb{P}_1$$

en particular, $P^{-1}[w_1]_{\mathcal{C}} = [w_1]_{\mathcal{B}}$ y $P^{-1}[w_2]_{\mathcal{C}} = [w_2]_{\mathcal{B}}$.

Observe que $P^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, que $[w_1]_{\mathcal{C}} = e_1$ y $[w_2]_{\mathcal{C}} = e_2$, por lo tanto

$$[w_1]_{\mathcal{B}} = P^{-1}e_1 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $w_1 = \frac{1}{5}(1 + x) + \frac{1}{5}(1 - 2x) = \frac{2}{5} - \frac{1}{5}x$, análogamente tenemos que

$$[w_2]_{\mathcal{B}} = P^{-1}e_2 = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3/5 \\ 2/5 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $w_2 = -\frac{3}{5}(1 + x) + \frac{2}{5}(1 - 2x) = -\frac{1}{5} - \frac{7}{5}x$.

Distribución de puntajes:

- (1punto) por determinar P^{-1}.
- (1punto) por reconocer como actúa P^{-1} respecto a las coordenadas en $\mathcal{C}$.
- (1punto) por determinar $[w_1]_B$
- (1punto) por determinar $[w_1]_B$
- (1 punto) por determinar w_1.

- (1 punto) por determinar w_2.

4. Se sabe que la matriz
$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 1 & 3 & -1 \\ -1 & -2 & 2 \end{bmatrix}$$
tiene a 1 como valor propio. Determine si A es diagonalizable, en caso afirmativo determine una diagonalización para A.

Solución:

Para determinar los otros valores propios resolvemos la ecuación característica es decir, busacmos als soluciones de
$$\det(A - \lambda I) = 0$$
que corresponde a
$$-(\lambda - 1)^2(\lambda - 5) = 0$$
obteniendo que los valores propios de A son 1 y 5. Para determinar si A es diagonalizable o no, tenemos que ver si el espacio propio asociado al valor propio 1 tienen dimensión 2.
$E_{\lambda=1} = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix}\right) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$ como el espacio propio asociado al valor propio 1 tiene dimensión 2, podemos concluir que A es diagonalizable. Para determinar la diagonalización estudiaremos el espacio propio asociado al valor propio 5. $E_{\lambda=5} = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \\ -1 & -2 & -3 \end{bmatrix}\right) = \text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}\right) = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$
por lo tanto una diagonalización para A es
$$P = \begin{bmatrix} -2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ y } D = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{bmatrix}.$$

Distribución de puntajes:

- (1punto) por ecuación carateristica.
- (1punto) por determinar valores propios.
- (1punto) por determinar generadores paraE_1
- (1punto) por determinar generador paraE_5
- (1 punto) por determinar P.
- (1 punto) por determinar D.

5. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. En caso de ser verdaderas demuéstrela, en caso de ser falsa dé un contrajemplo.

   a) Toda matriz de $n \times n$ con n vectores propios linealmente independientes es invertible.
   Solución:

   FALSO. Contrajemplo $\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ya que $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ son vectores propios l.i. pero la matriz no es invertible ya que el determinante es cero.
   Distribución de puntajes:

   - (1punto) por decir que es falsa.
   - (1punto) por contraejemplo.
   - (1punto) por justificar e contraejemplo.

   b) Si A es una matriz de $n \times n$ tal que $A^2 = A$, entonces $\text{Col}(A) \cap \text{Nul}(A) = \{0\}$.
   VERDADERO. Suponga que $b \in \text{Col}(A) \cap \text{Nul}(A)$, entonces $Ab = 0$ y existe x tal que $Ax = b$, luego

   $$0 = Ab = A(Ax) = A^2x = Ax = b$$

   entonces $b = 0$.
   Distribución de puntajes:

   - (1punto) por decir que es verdadera.
   - (2 punto) por demostración.