PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

# Pauta Examen - MAT1203

1. Determine para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 2a & 0 & a \end{bmatrix}$$

es invertible.

**Solución:**

La matriz $A$ es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$ o bien si $A$ tiene cuatro pivotes.

Observe que

$$A \quad F_4 \to F_4 - F_1 \quad \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

$$F_3 \to F_3 - F_1 \quad \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 0 & a-1 & -a \\ 0 & 0 & 0 & a \end{bmatrix}$$

por lo que $A$ es invertible si y sólo si $a \neq 0$ y $a \neq 1$, ya que $\det(A) = a^2(a-1)$, de manera equivalentemente porque de esa forma tiene 4 pivotes.

**Distribución de puntajes:**

- (2 ptos) Por determinar la condición para que la matrizsea invertible.
- (2 ptos) Por determinar el determinante o los pivotes
- (1 pto) Por decir que $a \neq 0$.
- (1 pto) Por decir que $a \neq 0$.

2. Considere el conjunto $P$ de todos los vectores en $\mathbb{R}^3$ con coordenadas no negativas.

   a) Mostrar que si $u, v$ son vectores no nulos en $P$ y ortogonales, entonces al menos uno de ellos está sobre alguno de los planos coordenados.

   b) Mostrar que si $u, v, w$ son vectores no nulos en $P$ y ortogonales, entonces cada uno de ellos está sobre cada uno de los tres ejes coordenados.

   **Solución:**

   Si $u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix}, v = \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{bmatrix}, w = \begin{bmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{bmatrix}$, si $u \cdot v = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3 = 0$, entonces $u_iv_i = 0$ para todo $i = 1, 2, 3.$, por lo tanto alguna de las entradas es cero, luego al menos uno de ellos están en un plano coordenado.

   Si suponemos, sin pérdida de generalidad que, $u$, no está en un eje coordenado entonces dos entradas de $u$ son no nulas, por ejemplo $u_1 > 0$ y $u_2 > 0$ , como $u \cdot v = 0$ y $u \cdot w = 0$ tendremos que $v_1 = v_2 = w_1 = w_2 = 0$, luego $w \cdot v = v_3w_3 = 0$ luego $v_3 = 0$ o $w_3 = 0$ en tal caso o $v$ o $w$ son vectores nulos lo que contradice la hipótesis.

   **Distribución de puntajes:**

   - (1 pto) Por definición de ortogonalidad.
   - (2 ptos) Por justificar que pertenecen a un plano coordenado
   - (1 pto) Por determinarque significa no estar en el eje.
   - (2 pto) Por justificara pertenencia al eje coordenado..

3. a) Sea $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que la matriz de la transformación con respecto a las bases $\mathcal{B} = \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ en $\mathbb{R}^3$ y la base canónica en $\mathbb{R}^2$ es

   $$[T] = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

   Determine una fórmula para $T$.

   **ANULADA**.

   b) Sean $P$ una matriz ortogonal de $m \times m$ y $A$ una matriz de $m \times n$. Demuestre que si $\sqrt{\sigma}$ es valor singular de $PA$ entonces $\sqrt{\sigma}$ también es valor singular de $A$.

   **Solución:**

   Si $\sqrt{\sigma}$ es valor singular de $PA$ entonces $\sigma$ es valor propio de $(PA)^T(PA) = A^TP^TPA = A^TA$, es decir, $\sigma$ es valor propio de $A^TA$ ya que $P^TP = Id$, luego $\sqrt{\sigma}$ es valor singular de $A$.

   **Distribución de puntajes:**

   - (2 ptos) por definición de valor singular
   - (2 ptos) desarrollo de $(PA)^T(PA)$

– (2 ptos) por concluir.

4. Considere la forma cuadrática $Q(x_1, x_2) = 3x_1^2 - 2x_1x_2 + 3x_2^2$. Clasifique $Q$ y luego realice un cambio de variable que permita eliminar el producto cruzado de $Q$.

**Solución:**

Observe que la matriz que representa a la transformación es

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix}$$

cuyo polinomio característico es

$$P_A(x) = (3-x)^2 - 1$$

por lo que los vectores propios son $\lambda_1 = 2$ y $\lambda_2 = 4$, con esto podemos afirmar que la forma cuadrática es definida positiva.

Para encontrar el cambio de variables veamos que

$$E_2 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}, E_4 = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}\right\}$$

por lo tanto $A = PDP^T$, con $P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}$

así el cambio de variables es $P^T x = y$, con esto queda $y_1 = \dfrac{x_1 + x_2}{\sqrt{2}}$, $y_2 = \dfrac{x_1 - x_2}{\sqrt{2}}$. La forma cuadrática sin rpductos cruzados queda $2y_1^2 + 4y_2^2$.

**Distribución de puntajes:**

- (1 pto) Por encontrar valores propios de la matriz que representa la forma cuadrática.
- (1 pto) Por clasificar $Q$.
- (1 pto) Por los espacios propios.
- (1 pto) Por encontrar $P$.
- (1 pto) Por el cambio de variable.
- (1 pto) Por escribir la forma sin productos cruzados.

5. Sea $A = \begin{bmatrix} 7 & 1 \\ 0 & 0 \\ 5 & 5 \end{bmatrix}$. Encuentre una descomposición en valores singulares de $A$.

**Solución:**

Observe que

$$A^T A = \begin{bmatrix} 74 & 32 \\ 32 & 26 \end{bmatrix}$$

y cuyos valores propios son $\lambda_1 = 90$ y $\lambda_2 = 10$ por lo tanto los valores singulares son $\sigma_1 = 3\sqrt{10}$ y $\sigma_2 = \sqrt{10}$, luego

$$\Sigma = \begin{bmatrix} 3\sqrt{10} & 0 \\ 0 & \sqrt{10} \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Ahora buscamos los vectores propios de $A^T A$ para construir la matriz $V$ que es ortogonal. Así $v_1 = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} \\ \\ 1/\sqrt{5} \end{bmatrix}, v_2 = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{5} \\ \\ 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$, por lo tanto la matriz

$$V^T = \begin{bmatrix} 2/\sqrt{5} & 1/\sqrt{5} \\ \\ -1/\sqrt{5} & 2/\sqrt{5} \end{bmatrix}$$

Determinamos $u_1 = \dfrac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}, u_2 = \dfrac{Av_1}{\sigma_1} = \begin{bmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 0 \\ 1/\sqrt{2} \end{bmatrix}$ de esta forma el fácil completar a una base ortogonal de $\mathbb{R}^3$, considerando $u_3 = e_2$, obteniendo la matriz

$$U = \begin{bmatrix} 1/\sqrt{2} & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1/\sqrt{2} & 1/\sqrt{2} & 0 \end{bmatrix}$$

**Distribución de puntajes:**

- (1 pto) Por determinar $A^T A$.
- (1 pto) Por determinar los valores propios.
- (1 pto) Por determinar $\sigma$
- (1 pto)Por determinar $v_1, v_2$.
- (1 pto)Por determinar $u_1, u_2$.
- (1 pto)Por determinar $U$.