PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2026

Interrogación 2 - MAT1203

1. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la transformación lineal tal que

$$T\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad T\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}.$$

   a) Encuentre la matriz de la transformación.
   b) Verifique que T es la transformación que toma los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$, los rota en $-\frac{3\pi}{4}$ y posteriormente los refleja en el eje X.
   c) Demuestre que T es invertible.
   d) Encuentre la fórmula que define a T^{-1}.

Solución:

a) Para determinar la matriz de T, basta encontrar $T(e_1)$ y $T(e_2)$, donde

$$e_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}.$$

Como

$$\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} = \sqrt{2}e_1,$$

por linealidad se tiene que $T\left(\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix}\right) = \sqrt{2}T(e_1)$, entonces

$$T(e_1) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Ahora observemos que

$$\begin{pmatrix}\sqrt{2}\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sqrt{2}\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\\sqrt{2}\end{pmatrix} = \sqrt{2}e_1 + \sqrt{2}e_2.$$

por lo tanto, aplicando T tenemos que:

$$T(e_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

Así, la matriz de T es

$$[T] = \begin{pmatrix}-\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\\\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}}\end{pmatrix}.$$

b) Al rotar el vector e_1 en $-\frac{3\pi}{4}$, el vector queda apuntando en dirección del ángulo $-\frac{3\pi}{4}$, es decir,

$$e_1 \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{3\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Luego, al reflejar respecto del eje X, la primera coordenada queda igual y la segunda cambia de signo, obteniéndose

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Este vector coincide con

$$T(e_1) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Ahora observe que al rotar e_2 en $-\frac{3\pi}{4}$, el vector queda apuntando en dirección del ángulo

$$\frac{\pi}{2} - \frac{3\pi}{4} = -\frac{\pi}{4},$$

por lo tanto

$$e_2 \mapsto \begin{pmatrix} \cos\left(-\frac{\pi}{4}\right) \\ \sin\left(-\frac{\pi}{4}\right) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Reflejando respecto del eje X, se obtiene

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

Este vector coincide con

$$T(e_2) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}.$$

c) Observe que $det([T]) = det\left(\begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}\right) = -1$, por lo tanto la matriz $[T]$ es invertible, luego la transformación T también lo es.

d) Observe que $[T^{-1}] = [T]^{-1} = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$ por lo tanto la fórmula es $T^{-1}\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \frac{-x+y}{\sqrt{2}} \\ \frac{x+y}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	0.5 pto	Determina correctamente $T(e_1)$.
C2	0.5 pto	Determina correctamente $T(e_2)$.
C3	0.5 pto	Escribe correctamente la matriz asociada a la transformación.
C4	0.5 pto	Analiza correctamente el efecto de rotar e_1 en $-\frac{3\pi}{4}$ y luego reflejarlo respecto del eje X.
C5	0.5 pto	Analiza correctamente el efecto de rotar e_2 en $-\frac{3\pi}{4}$ y luego reflejarlo respecto del eje X.
C6	0.5 pto	Concluye correctamente que, como ambas transformaciones coinciden en una base de $\mathbb{R}^2$, entonces corresponden a la misma transformación.
C7	1.5 ptos	Demuestra correctamente que T es invertible.
C8	0.5 pto	Determina correctamente la matriz asociada a T^{-1}.
C9	1 pto	Determina correctamente la fórmula de T^{-1}.

2. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

a) Determine los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales A es invertible.

b) Para los valores de a encontrados en el inciso anterior, use el método de Crammer, para encontrar la segunda columna de A^{-1}.

Solución:

a) Para determinar los valores de a para los cuales A es invertible, calculamos el determinante de A.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ a & 1 \end{vmatrix}.$$

Luego,

$$\det(A) = 1(1) - 1(0 - a) = 1 + a.$$

Por lo tanto, A es invertible si y sólo si

$$\det(A) \neq 0,$$

es decir,

$$a + 1 \neq 0.$$

Así, A es invertible para

$$a \neq -1.$$

b) Para encontrar la segunda columna de A^{-1}, debemos resolver el sistema

$$Ax = e_2,$$

donde

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Usando el método de Crammer, tenemos que

$$x_i = \frac{\det(A_i)}{\det(A)},$$

donde A_i se obtiene reemplazando la columna i de A por e_2.
Como $\det(A) = a + 1$, calculamos:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{-1}{a+1}.$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 1 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{1}{a+1}.$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ a & 0 & 0 \end{vmatrix}}{a+1} = \frac{a}{a+1}.$$

Por lo tanto, la segunda columna de A^{-1} es

$$\begin{pmatrix} -\frac{1}{a+1} \\ \frac{1}{a+1} \\ \frac{a}{a+1} \end{pmatrix}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1.5 ptos	Calcula correctamente $\det(A)$.
C2	1.5 ptos	Concluye correctamente que A es invertible si y sólo si $a \neq -1$.
C3	1.5 ptos	Plantea correctamente el sistema $Ax = e_2$.
C4	0.5 pto	Calcula correctamente x_1 usando el método de Crammer.
C5	0.5 pto	Calcula correctamente x_2 usando el método de Crammer.
C6	0.5 pto	Calcula correctamente x_3 usando el método de Crammer.

3. a) Sea A una matriz de 4×4 tal que $A^T A = -8A^{-1}$. Calcule $|\text{Adj}(A)|$.

   b) Demuestre que si $A^2 - I$ no es invertible y $A + I$ sí lo es, entonces $A - I$ no es invertible.

Solución:

a) Tomando determinante en la igualdad

$$A^T A = -8A^{-1},$$

se obtiene

$$\det(A^T A) = \det(-8A^{-1}).$$

Luego, como A es de tamaño 4×4,

$$\det(A^T)\det(A) = (-8)^4 \det(A^{-1}).$$

Por lo tanto,

$$\det(A)^2 = 8^4 \frac{1}{\det(A)}.$$

Así,

$$\det(A)^3 = 8^4.$$

Luego,

$$\det(A) = 16.$$

Ahora, usando que

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\text{adj}(A),$$

obtenemos

$$\text{adj}(A) = |A|A^{-1}.$$

Tomando determinante en ambos lados,

$$|\text{adj}(A)| = ||A|A^{-1}|.$$

Como A es de tamaño 4×4,

$$|\text{adj}((A)| = |A|^4|A^{-1}|.$$

Además,

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}.$$

Por lo tanto,

$$|\text{adj}((A)| = |A|^4 \frac{1}{|A|} = |A|^3.$$

Finalmente,

$$|\text{adj}((A)| = 16^3.$$

b) Factorizando tenemos que

$$A^2 - I = (A - I)(A + I)$$

sabemos que producto de matrices invertibles es invertibles por lo tanto , si $A + I$ es invertible $A - I$ no puede ser invertible.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	0.5 pto	Toma correctamente determinante en ambos lados de la igualdad.
C2	1 pto	Calcula correctamente $\det(A)$.
C3	0.5 pto	Usa correctamente la relación $A^{-1} = \frac{1}{\|A\|}\text{adj}(A)$.
C4	1 pto	Calcula correctamente $\|\text{adj}A)\|$.
C5	1 pto	Factoriza correctamente $A^2 - I$ como $(A - I)(A + I)$.
C6	1 pto	Usa la propiedad de productos de matrices invertibles.
C7	1 pto	Concluye correctamente que $A - I$ no es invertible.

NOTA: El inciso b) también puedo ser resuelto usando determinantes, para esto debe factorizar (1 pto) afirmar que si $A + I$ es invertible $|A + I| = 0$ (0.5 pto) que $|A^2 - I| = 0$ (0.5 pto) por lo tanto $|A - I| \neq 0$ (1 pto.).

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_3$ de polinomios de grado menor o igual a 3 y sea

$$H = \{p(x) \in \mathbb{P}_3 : p(1) = p(-1)\}.$$

a) Demuestre que H es subespacio de $\mathbb{P}_3$.

b) Determine una base para H.

Solución:

a) Primero observemos que el polinomio cero pertenece a H, pues si $p(x) = 0$, entonces

$$p(1) = 0 = p(-1).$$

Por lo tanto, $0 \in H$.
Ahora sean $p(x), q(x) \in H$. Entonces

$$p(1) = p(-1)$$

y

$$q(1) = q(-1).$$

Luego,

$$(p+q)(1) = p(1) + q(1) = p(-1) + q(-1) = (p+q)(-1).$$

Por lo tanto, $p + q \in H$.
Finalmente, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y sea $p(x) \in H$. Entonces

$$p(1) = p(-1).$$

Luego,

$$(\lambda p)(1) = \lambda p(1) = \lambda p(-1) = (\lambda p)(-1).$$

Por lo tanto, $\lambda p \in H$.
Así, H es subespacio de $\mathbb{P}_3$.

b) Sea $p(x) \in H$. Como $p(x) \in \mathbb{P}_3$, existen $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ tales que

$$p(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d.$$

Como $p(x) \in H$, se debe cumplir que

$$p(1) = p(-1).$$

luego,

$$a + b + c + d = -a + b - c + d.$$

es decir,

$$c = -a.$$

Así, todo polinomio de H es de la forma

$$p(x) = ax^3 + bx^2 - ax + d = a(x^3 - x) + bx^2 + d = a(x^3 - x) + bx^2 + d$$

luego $\{x^3 - x, x^2, 1\}$ genera H. Además $\{x^3 - x, x^2, 1\}$ es l.i. ya que si

$$\alpha(x^3 - x) + \beta x^2 + \gamma 1 = 0 \text{ sí y solo si } \alpha = \beta = \gamma = 0.$$

por lo tanto $\{x^3 - x, x^2, 1\}$ es una base para H.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	0.5 pto	Verifica que el polinomio cero pertenece a H.
C2	1 pto	Demuestra que H es cerrado bajo suma.
C3	1 pto	Demuestra que H es cerrado bajo ponderación por escalares.
C4	0.5 pto	Concluye que H es subespacio de $\mathbb{P}_3$.
C5	0.5 pto	Describe los polinomios de H obteniendo que son de la forma $a(x^3 - x) + bx^2 + d$.
C6	1 pto	Concluye que que $\{x^2, 1, x^3 - x\}$ genera H.
C7	1 pto	Demuestra que $\{x^2, 1, x^3 - x\}$ es linealmente independiente.
C8	0.5 pto	Concluye que $\{x^2, 1, x^3 - x\}$ es una base para H.

NOTA: El inciso a) también puedo ser resuelto escribiendo H como un conjunto generado (1.5 pto) , y afirmando que todo conjunto generado es un subespacio (1.5 pto).