PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2026

Pauta Interrogación 2 - MAT1203

1. Sea A la matriz

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

   (a) Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los cuales la matriz A es invertible.

   (b) Para $a = 2$, escriba la matriz A como producto de matrices elementales.

Solución

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 2a & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

(a) Para determinar los valores de a para los cuales la matriz A es invertible, calculamos su determinante. Para ello, aplicamos operaciones elementales por filas que no alteran el determinante.

Restamos la primera fila a la cuarta fila:

$$F_4 \longrightarrow F_4 - F_1,$$

obteniendo

$$\begin{pmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a-2 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

La matriz resultante es triangular, por lo que su determinante es el producto de los elementos de la diagonal principal:

$$\det(A) = a \cdot 1 \cdot (a-1) \cdot 2a = 2a^2(a-1).$$

Por lo tanto, la matriz A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$, es decir,

$$a \neq 0 \quad \text{y} \quad a \neq 1.$$

(b) Para $a = 2$, la matriz A queda dada por

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Aplicamos operaciones elementales por filas hasta obtener la matriz identidad.

Primero, realizamos la operación

$$F_4 \longrightarrow F_4 - F_1.$$

La matriz elemental asociada es

$$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

y se tiene que

$$E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Luego, aplicamos

$$F_3 \longrightarrow F_3 - F_2.$$

La matriz elemental correspondiente es

$$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

con lo que

$$E_2 E_1 A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

A continuación, dividimos la primera fila por 2:

$$F_1 \longrightarrow \tfrac{1}{2} F_1.$$

La matriz elemental asociada es

$$E_3 = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente, dividimos la cuarta fila por 4:

$$F_4 \longrightarrow \tfrac{1}{4}F_4.$$

La matriz elemental asociada es

$$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{1}{4} \end{pmatrix}.$$

Con estas operaciones se obtiene

$$E_4E_3E_2E_1A = I_4.$$

Por lo tanto,

$$A = E_1^{-1}E_2^{-1}E_3^{-1}E_4^{-1},$$

donde las inversas de las matrices elementales son

$$E_1^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_2^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E_3^{-1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad E_4^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}.$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Simplifica la matriz mediante operaciones elementales para calcular el determinan
C2	1 pto	Calcula correctamente el determinante de A.
C3	1 pto	Concluye correctamente los valores de a para los cuales A es invertible.
C4	1 pto	Determina correctamente las matrices elementales asociadas a las operaciones por
C5	1 pto	Calcula explícitamente las inversas de las matrices elementales.
C6	1 pto	Concluye correctamente la descomposición de A como producto de matrices eleme

2. Sea A una matriz 4×4 tal que $\det(A) = 3$.

   (a) Calcule $\det(2A^t) + \det\left(\frac{1}{2}A^{-1}\right)$.

   (b) Calcule $\det(\text{Adj}(A))$.

Solución

Sea A una matriz 4×4 tal que $\det(A) = 3$.

(a) Calculamos cada determinante por separado.

En primer lugar, usando que $\det(A^t) = \det(A)$ y que para una matriz 4×4 se cumple $\det(cA) = c^4 \det(A)$, se tiene

$$\det(2A^t) = 2^4 \det(A^t) = 16 \det(A) = 16 \cdot 3 = 48.$$

Por otra parte, sabemos que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ y nuevamente que $\det(cA) = c^4 \det(A)$ para matrices de orden 4. Entonces,

$$\det\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right) = \left(\tfrac{1}{2}\right)^4 \det(A^{-1}) = \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{\det(A)} = \tfrac{1}{16} \cdot \tfrac{1}{3} = \tfrac{1}{48}.$$

Por lo tanto,

$$\det(2A^t) + \det\left(\tfrac{1}{2}A^{-1}\right) = 48 + \tfrac{1}{48} = \tfrac{2305}{48}.$$

(b) Sabemos que para una matriz $n \times n$ invertible se cumple que

$$\mathrm{Adj}(A) = \det(A)A^{-1}.$$

Como A es 4×4, tenemos

$$\det(\mathrm{Adj}(A)) = \det(\det(A)A^{-1}) = \det(A)^4 \det(A^{-1}).$$

Usando que $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$ y que $\det(A) = 3$, obtenemos

$$\det(\mathrm{Adj}(A)) = 3^4 \cdot \tfrac{1}{3} = 3^3 = 27.$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Usa correctamente la propiedad $\det(A^t) = \det(A)$.
C2	1 pto	Usa correctamente la propiedad $\det(cA) = c^4 \det(A)$.
C3	1 pto	Usa correctamente la propiedad $\det(A^{-1}) = \dfrac{1}{\det(A)}$.
C4	1 pto	Calcula correctamente la expresión del inciso (a).
C5	1 pto	Usa correctamente la relación $\mathrm{Adj}(A) = \det(A)A^{-1}$.
C6	1 pto	Calcula correctamente $\det(\mathrm{Adj}(A))$.

3. Sea F una matriz fija de 2×3, y sea H el conjunto de todas las matrices A de 3×2 con la propiedad de que $FA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

   (a) Demuestre que H es un subespacio de $M_{3\times 2}$.

   (b) Si $F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, determine una base para H.

Solución

Sea F una matriz fija de 2×3 y sea

$$H = \left\{ A \in M_{3\times 2} : \ FA = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

(a) Demostremos que H es un subespacio de $M_{3\times 2}$.

En primer lugar, la matriz nula $0_{3\times 2}$ pertenece a H, pues

$$F0_{3\times 2} = 0_{2\times 2}.$$

Sean ahora $A, B \in H$. Entonces $FA = 0$ y $FB = 0$, por lo que

$$F(A + B) = FA + FB = 0 + 0 = 0,$$

lo que muestra que $A + B \in H$.

Finalmente, sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $A \in H$. Se tiene

$$F(\lambda A) = \lambda FA = \lambda 0 = 0,$$

por lo que $\lambda A \in H$.

Como H contiene al neutro y es cerrado bajo suma y multiplicación escalar, se concluye que H es un subespacio de $M_{3\times 2}$.

(b) Sea

$$F = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} \in M_{3\times 2}.$$

La condición $FA = 0$ equivale a

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \\ e & f \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al realizar el producto matricial se obtiene el sistema

$$\begin{cases} a + c + e = 0, \\ b + d + f = 0, \\ e = 0, \\ f = 0. \end{cases}$$

De las dos últimas ecuaciones se tiene $e = 0$ y $f = 0$, y al sustituir en las primeras se obtiene

$$a + c = 0, \qquad b + d = 0.$$

Por lo tanto, $c = -a$ y $d = -b$, y las matrices de H son de la forma

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ -a & -b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \qquad a, b \in \mathbb{R}.$$

De lo anterior se concluye que una base para H es

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Verifica que la matriz nula pertenece a H.
C2	1 pto	Demuestra que H es cerrado bajo la suma.
C3	1 pto	Demuestra que H es cerrado bajo la multiplicación escalar.
C4	1 pto	Plantea correctamente la condición $FA = 0$ para el F dado.
C5	1 pto	Resuelve correctamente el sistema asociado a $FA = 0$.
C6	1 pto	Determina una base de H.

4. Considere $\mathbb{P}_1 = \{ax + b : a, b \in \mathbb{R}\}$, el espacio de polinomios de grado menor o igual a uno, y sean

$$\mathcal{B} = \{1 - x,\ 2 + x\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$$

bases de $\mathbb{P}_1$.

Si la matriz

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$, determine los polinomios w_1 y w_2.

Solución

Sea $\mathbb{P}_1 = \{ax + b :\ a, b \in \mathbb{R}\}$ y sean

$$\mathcal{B} = \{1 - x,\ 2 + x\} \quad \text{y} \quad \mathcal{C} = \{w_1, w_2\}$$

bases de $\mathbb{P}_1$.

Se nos indica que

$$P = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

es la matriz de cambio de coordenadas de la base $\mathcal{B}$ a la base $\mathcal{C}$. Por lo tanto, la matriz de cambio de coordenadas de $\mathcal{C}$ a $\mathcal{B}$ es P^{-1}.

Calculamos

$$P^{-1} = \frac{1}{\det(P)} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Las columnas de P^{-1} corresponden a las coordenadas de los vectores de la base $\mathcal{C}$ escritas en la base $\mathcal{B}$. En particular,

$$[w_1]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \qquad [w_2]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$w_1 = \frac{1}{5}(1-x) - \frac{2}{5}(2+x) = -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}x,$$
$$w_2 = \frac{2}{5}(1-x) + \frac{1}{5}(2+x) = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x.$$

Así, los polinomios buscados son

$$w_1 = -\frac{3}{5} - \frac{3}{5}x, \qquad w_2 = \frac{4}{5} - \frac{1}{5}x.$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	2 ptos	Reconoce correctamente que se debe calcular la matriz inversa P^{-1}.
C2	1 pto	Calcula correctamente la inversa de la matriz P.
C3	1 pto	Interpreta las columnas de P^{-1} como coordenadas en la base $\mathcal{B}$.
C4	1 pto	Reconstruye correctamente el polinomio w_1.
C5	1 pto	Reconstruye correctamente el polinomio w_2.