PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

Pauta Interrogación 2 - MAT1203

1. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ a $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x+y \\ x-y \\ 2x \end{bmatrix}$$

   a) Encuentre la matriz de la transformación.

   b) Determine si la transformación es inyectiva.

   c) ¿Es cierto que T transforma rectas en rectas? Justifique su respuesta.

Solución:

a) La matriz asociada a la transformación se obtiene aplicando T a los vectores canónicos de $\mathbb{R}^2$.

$$T(e_1) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad T(e_2) = T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto,

$$[T] = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

b) Para determinar si T es inyectiva, calculamos el núcleo de T:

$$[T]\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x+y=0 \\ x-y=0 \\ 2x=0 \end{cases} \Rightarrow x=0,\ y=0.$$

Por lo tanto, $\ker(T) = \{0\}$ y por lo tanto T es inyectiva.

c) Toda transformación lineal de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^3$ transforma rectas en rectas, ya que si una recta se parametriza como $x = tv + u$ con $u \neq 0$, entonces la imagen es $T(x) = tT(v) + T(u)$ con $T(u) \neq 0$ ya que T es inyectiva y por lo tanto la imagen también es una recta en $\mathbb{R}^3$.

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Determina $T(e_1)$ y $T(e_2)$.
C2	1 pto	Construye correctamente la matriz asociada.
C3	1 pto	Determina correctamente el núcleo de T.
C4	1 pto	Concluye que T es inyectiva.
C5	1 pto	Justifica la linealidad del argumento.
C6	1 pto	Explica por qué T transforma rectas en rectas.

2. Considere la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & t \\ 0 & t & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

a) Determine todos los valores de $t \in \mathbb{R}$ para los que la matriz A es invertible.

b) Para $t = 1$ encuentre la tercera columna de A^{-1} **sin encontrar las otras columnas** de la inversa.

Solución:

a) Para determinar cuándo A es invertible, calculamos su determinante:

$$\det(A) = 1(t \cdot 1 - 1 \cdot 0) - 2(0 \cdot 1 - 1 \cdot 1) + t(0 \cdot 0 - t \cdot 1) = t + 2 - t^2 = -t^2 + t + 2.$$

Por lo tanto, A es invertible si y solo si $\det(A) \neq 0$, es decir, para $t \neq 2$ y $t \neq -1$.

b) Para $t = 1$, queremos la tercera columna de A^{-1} sin calcular toda la inversa. Recordemos que la tercera columna de A^{-1} corresponde a la solución del sistema $Ax = e_3$.
Para $t = 1$,

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad e_3 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Resolviendo $Ax = e_3$:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Aplicamos F3 $\rightarrow$ F3 - F1 obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

ahora relaizamos F3 $\rightarrow$ F3+2F2, obtenemos:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}.$$

De la última fila: $2x_3 = 1 \Rightarrow x_3 = \frac{1}{2}$, luego de la segunda $x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_2 = -\frac{1}{2}$, y de la primera $x_1 + 2x_2 + x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + 2(-\frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow x_1 = \frac{1}{2}$.

Así, la tercera columna de A^{-1} es $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} \end{bmatrix}$.

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Calcula correctamente el determinante de A.
C2	2 pto	Determina los valores de t que hacen a A invertible.
C3	1 pto	Plantea el sistema $Ax = e_3$.
C4	1 pto	Resuelve correctamente el sistema.
C5	1 pto	Obtiene correctamente la tercera columna de A^{-1}.

3. a) Usando el determinante, encuentre el área del paralelogramo con vértices $(1,3), (-2,6), (1,11)$ y $(4,8)$.

   b) Use la regla de Cramer para resolver el sistema

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$$

Solución:

a) El área del paralelogramo con vértices $(1,3)$, $(-2,6)$, $(1,11)$ y $(4,8)$ se calcula como el valor absoluto del determinante de los vectores que definen sus lados.
Tomemos $v_1 = (-2,6) - (1,3) = (-3,3)$ y $v_2 = (1,11) - (1,3) = (0,8)$.

$$A = |\det(v_1, v_2)| = |(-3)(8) - (3)(0)| = |-24| = 24.$$

b) Para el sistema

$$\begin{cases} 4x + y = 6 \\ 5x + 2y = 7 \end{cases}$$

usamos la regla de Cramer:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = 8-5 = 3, \quad \det(A_x) = \begin{vmatrix} 6 & 1 \\ 7 & 2 \end{vmatrix} = 12-7 = 5, \quad \det(A_y) = \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 5 & 7 \end{vmatrix} = 28-30 = -2.$$

Entonces,

$$x = \frac{5}{3}, \quad y = -\frac{2}{3}.$$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Determina correctamente los vectores que definen el paralelogramo.
C2	1 pto	Calcula correctamente el determinante para el área.
C3	1 pto	Plantea correctamente las matrices del sistema.
C4	1 pto	Aplica correctamente la regla de Cramer.
C5	1 pto	Obtiene los valores correctos de x y y.
C6	1 pto	Interpreta correctamente los resultados.

4. Considere el espacio vectorial $\mathbb{P}_2$ de polinomios de grado menor o igual que 2, y sea

$$H = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 : p(1) = p(-1)\}$$

a) Demuestre que H es subespacio de $\mathbb{P}_2$.

b) Escriba H como conjunto generado.

c) ¿Los polinomios $1 + x - x^2, 1 + x, 1 - x^2$ son linealmente independientes o linealmente dependientes?

Solución:

a) Para verificar que H es subespacio debemos mostrar que:

i) $\mathbf{0} \in H$. Observe que el $\mathbf{0}$ del espacio vectorial es la función constante cero, por lo que pertenece a H ya que al evaluar en 1 y en -1 obtenemos cero.

ii) Suponga que p y q pertenecen a H, es decir que $p(1) = p(-1)$ y que $q(1) = q(-1)$, entonces

$$p + q(1) = p(1) + q(1) = p(-1) + q(-1) = p + q(-1)$$

por lo tanto $p + q \in H$, es decir H es cerrado bajo la suma.

ii) Suponga que p pertenece a H, es decir que $p(1) = p(-1)$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

$$\alpha p(1) = \alpha p(-1)$$

por lo tanto $\alpha p \in H$, es decir H es cerrado bajo la ponderación escalar.

Como se cumple i), ii) y ii) tenemso que H es subespacio.

b) Sea $p(x) = ax^2 + bx + c$. La condición $p(1) = p(-1)$ implica

$$a + b + c = a - b + c \Rightarrow b = 0.$$

Por lo tanto,

$$H = \{ax^2 + c : a, c \in \mathbb{R}\} = \text{Gen}\{x^2, 1\}.$$

c) Los polinomios $1 + x - x^2, 1 + x, 1 - x^2$ son linealmente independientes ya que si

$$\alpha(1 + x - x^2) + \beta(1 + x) + \gamma(1 - x^2) = 0$$

entonces el sistema

$$\begin{cases} \alpha + \beta + \gamma = 0 \\ \alpha + \beta = 0 \\ -\alpha - \gamma = 0 \end{cases}$$

tiene única solución $\alpha = \beta = \gamma = 0$

Criterio de evaluación:

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 pto	Verifica que $0 \in H$.
C2	0.5 pto	Verifica correctamente la clausura bajo suma.
C3	0.5 pto	Verifica correctamente la clausura bajo multiplicación escalar.
C4	0.5 pto	Concluye que H es subespacio.
C5	1 pto	Plantea la condición $p(1) = p(-1)$.
C6	1 pto	Escribe H como conjunto generado.
C7	1 pto	Dice que los polinomios son l.i
C8	1 pto	Justifica que los polinomios son l.i.