PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Interrogación 2 - MAT1203

1. a) Sean A y B matrices invertibles del mismo tamaño. Resuelva la ecuación matricial

$$A^{-1}XB^T = A^{-1}(B^2)^T$$

y simplifique la solución.

Solución:
Observe que si a la ecuación

$$A^{-1}XB^T = A^{-1}(B^2)^T$$

la multipolicamos a ambos lados por A para eliminar A^{-1} obtenemos que

$$AA^{-1}XB^T = AA^{-1}(B^2)^T$$

simplificando se tiene que

$$XB^T = (B^2)^T$$

Además sabemos que $(B^2)^T = B^TB^T$, por lo tanto:

$$XB^T = B^TB^T$$

Como B es invertible tenemos que B^T es invertible, por lo que multiplicamos ambos lados por $(B^T)^{-1}$ a la derecha obteniendo la igualdad

$$XB^T(B^T)^{-1} = B^TB^T(B^T)^{-1}$$

Al simplificar obtenemos que

$$X = B^T.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Despejar correctamente XB^T.
C2	**1 pto**	Usar correctamente las propiedades de la traspuesta.
C3	**1 pto**	Resolver la ecuación.

b) Sean A y B matrices de 5×5 tales que $\det(A) = -2$ y tal que $\det(2(A^{-1})^3 B^T) = 60$, calcule $\det(B^{-1})$.

Solución:

Sabemos que $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$, que $\det(kA) = k^n \det(A)$ para una constante k y una matriz A de tamaño $n \times n$ y que $\det(A) = \det(A^T)$. Como A y B son matrices 5×5, obtenemos que

$$\det(2(A^{-1})^3 B^T) = \det(2I_5 \cdot (A^{-1})^3 \cdot B^T)$$

Donde I_5 es la matriz identidad de tamaño 5×5, luego que $\det(2I_5) = 2^5 = 32$, de esta forma obtendremos que

$$\det(2(A^{-1})^3 B^T) = \det(2I_5) \cdot \det((A^{-1})^3) \cdot \det(B^T) = 32 \cdot \det((A^{-1})^3) \cdot \det(B)$$

Sabemos también $\det(A^{-1}) = \det(A)^{-1}$ Entonces:

$$\det((A^{-1})^3) = (\det(A^{-1}))^3 = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^3$$

Dado que $\det(A) = -2$, tenemos:

$$\det((A^{-1})^3) = \left(\frac{1}{-2}\right)^3 = -\frac{1}{8}$$

Sustituyendo en la expresión original obtenemos que

$$32 \cdot \left(-\frac{1}{8}\right) \cdot \det(B) = 60$$

luego

$$\det(B) = \frac{60}{-4} = -15$$

por lo que:

$$\det(B^{-1}) = -\frac{1}{15}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C4	**0.5 pto**	Usar correctamente la propiedad $\det(AB) = \det(A)\det(B)$.
C5	**0.5 pto**	Usar correctamente la propiedad $\det(kA) = k^n \det(A)$.
C6	**0.5 pto**	Usar correctamente la propiedad $\det(A) = \det(A^T)$.
C7	**0.5 pto**	Usar correctamente la propiedad $\det(A^{-1}) = 1/\det(A)$.
C8	**1 pto**	Concluir el valor pedido.

2. Sea P el paralelepípedo con un vértice en el origen y vértices adyacentes en los puntos $(1,4,0)$, $(-2,-5,2)$ y $(-1,2,-1)$.

a) Calcule el volumen de P.

Solución:

Considere los vectores:

$$\vec{v}_1 = (1,4,0), \quad \vec{v}_2 = (-2,-5,2), \quad \vec{v}_3 = (-1,2,-1)$$

El volumen del paralelepípedo es el valor absoluto del determinante formado por los tres vectores como columnas:

$$V = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -2 & -1 \\ 4 & -5 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{pmatrix} \right|$$

Calculamos el determinante:

$$\det = 1 \cdot \begin{vmatrix} -5 & 2 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (-2) \cdot \begin{vmatrix} 4 & 2 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1) \cdot \begin{vmatrix} 4 & -5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-5 \cdot -1 - 2 \cdot 2) + 2(4 \cdot -1 - 0 \cdot 2) + (-1)(4 \cdot 2 - 0 \cdot -5)$$

$$= 1(5-4) + 2(-4) + (-1)(8) = 1 - 8 - 8 = -15$$

$$V = |-15| = \boxed{15}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	**1 pto**	Por plantear correctamente la matriz a la que se le calculará el determinante.
C2	**1 pto**	Calcular correctamente el determinante.
C3	**1 pto**	Por determinar que el volumen es 15.

b) Si $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la transformación lineal definida por $T(x,y,z) = (x+2y, x+y+z, x-z)$. Determine el volumen de la imagen de P.

Solución:

La matriz asociada a T es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Calculamos su determinante:

$$\det(A) = 1 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} - 2 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} + 0 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 1(-1-0) - 2(-1-1) + 0 = -1 + 4 = 3$$

El volumen de la imagen es:

$$\text{Volumen imagen} = |\det(A)| \cdot \text{Volumen original} = 3 \cdot 15 = \boxed{45}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C4	**1 pto**	Por la matriz asociada a la transformación.
C5	**1 pto**	Calcular correctamente el determinante de la matriz.
C6	**1 pto**	Por determinar que el volumen es 45.

3. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ definida por:

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2x+3y \\ x+y+z \\ x-2z \end{bmatrix}$$

a) Encuentre la matriz de la transformación.

Solución:

Para encontrar la matriz asociada a T, aplicamos T a los vectores canónicos:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Entonces, la matriz asociada a T es:

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**0.5 pto**	Determinar la imagen de e_1.
C2	**0.5 pto**	Determinar la imagen de e_2.
C3	**0.5 pto**	Determinar la imagen de e_3.
C4	**0.5 pto**	Determinar la matriz.

b) Demuestre que T es invertible.

Solución:

Para que T sea invertible, su matriz asociada A debe ser invertible, es decir, debe tener determinante distinto de cero:

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} + 0\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$= 2(-2-0) - 3(-2-1) = -4+9 = 5$$

Como $\det(A) = 5 \neq 0$, la matriz es invertible y, por lo tanto, T es invertible. **Criterio de evaluación.**

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C5	**1 pto**	Por calcular el determinante.
C6	**1pto**	Por concluir que es invertible.

c) Encuentre una fórmula para T^{-1}.

Solución:

Para encontrar la fórmula de T^{-1} invertimos la matriz A, lo haremos aplicando el método de **Gauss-Jordan** , comenzamos con la matriz aumentada $[A \,|\, I]$:

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_1 \to \frac{1}{2}F_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$R_F \to F_2 - F_1, \quad F_3 \to F_3 - F_1 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{1}{2} & 1 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_2 \to -2F_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & \frac{3}{2} & 0 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & -\frac{3}{2} & -2 & -\frac{1}{2} & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_1 \to F_1 - \tfrac{3}{2}F_2, \quad F_3 \to F_3 + \tfrac{3}{2}F_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -5 & 1 & -3 & 1 \end{array}\right]$$

$$F_3 \to -\tfrac{1}{5}F_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 3 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 1 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

$$F_1 \to F_1 - 3F_3, \quad F_2 \to F_2 + 2F_3 \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -\frac{2}{5} & \frac{6}{5} & \frac{3}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{3}{5} & -\frac{4}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{1}{5} \end{array}\right]$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2 & 6 & 3 \\ 3 & -4 & -2 \\ -1 & 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Así que la fórmula es

$$T^{-1}\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} -2x + 6y + 3z \\ 3x - 4y - 2z \\ -x + 3y - z \end{bmatrix}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C7	**1 pto**	Por determinar la inversa de la matriz.
C8	**1pto**	Por encontrar la fórmula conociendo la matriz inversa.

4. Sea $H = \left\{ A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2} : A \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A \right\}$.

   a) Demuestre que H es un subespacio de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

   Solución

   Veamos que:

   - H **es cerrado bajo suma:** Si $A, B \in H$, entonces

     $$(A+B)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + B\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A + \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (A+B),$$

     por lo tanto, $A + B \in H$.
   - H **es cerrado bajo multiplicación escalar:** Si $A \in H$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces

     $$(\alpha A)\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \alpha\left(A\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \alpha\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} A\right) = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} (\alpha A),$$

     por lo tanto, $\alpha A \in H$.
   - H **contiene al neutro:** La matriz cero cumple que $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$, por lo tanto $\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in H$.

   Así, H es un subespacio vectorial de $\mathcal{M}_{2\times 2}$.

   Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Por determinar que H es cerrado bajo la suma.
C2	**1pto**	Por determinar que H es cerrado bajo la ponderación escalar.
C3	**1pto**	Por determinar que el neutro está en H.

b) Determine una base para H.

Solución:

Sea
$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$, $A \in H$ si y solo si

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

lo que equivale a que

$$\begin{bmatrix} a & 2a+b \\ c & 2c+d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+2c & b+2d \\ c & d \end{bmatrix}.$$

obteniendo el sistema

$$\begin{cases} a = a + 2c \Rightarrow 2c = 0 \Rightarrow c = 0 \\ 2a + b = b + 2d \Rightarrow 2a = 2d \Rightarrow a = d \end{cases}$$

Entonces las matrices $A \in H$ son de la forma:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ 0 & a \end{bmatrix} = a \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + b \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, una base para H es:

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

ya que geenran H y son l.i.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C4	**0.5 pto**	Plantear las condiciones sobre las entradas de una matriz que pertenece a H.
C5	**1 pto**	Por resolver el sistema asociado a las condiciones.
C6	**1 pto**	Determinar generadores.
C7	**0.5 pto**	establecer que estos geenradores forman base ya que son l.i..