1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ la transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = (3x - y, -x + 4y - z, -y + 3z)$$

Demuestre que T es invertible y determine una fórmula para la transformación inversa.

La matriz asociada a T es

$$\begin{pmatrix} 3 & -1 & 0 \\ -1 & 4 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

Vamos a pivotear para ver si es invertible la matriz ya que T es invertible $\Leftrightarrow$ la matriz lo es.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} -1 & 4 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 11 & -3 & 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 11 & -3 & 1 & 3 & 0 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 30 & 1 & 3 & 11 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 & 1/10 & 11/30 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 & 1/10 & 11/30 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 & 1/10 & 11/30 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & -4 & 0 & -1/30 & -11/10 & -4/30 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 & 1/10 & 11/30 \end{array}\right)$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 11/30 & 1/10 & 1/30 \\ 0 & 1 & 0 & 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 0 & 0 & 1 & 1/30 & 1/10 & 11/30 \end{array}\right)$$

Como la matriz asociada a T es invertible tenemos que T es invertible y la matriz de la transf. inversa es la inversa de la matriz asociada a T es decir la matriz

$$\begin{pmatrix} 11/30 & 1/10 & 1/30 \\ 1/10 & 3/10 & 1/10 \\ 1/30 & 1/10 & 11/30 \end{pmatrix}$$

$\therefore$ la fórmula es:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \begin{pmatrix} \frac{11}{30}x + \frac{1}{10}y + \frac{1}{30}z \\ \frac{1}{10}x + \frac{3}{10}y + \frac{1}{10}z \\ \frac{1}{30}x + \frac{1}{10}y + \frac{11}{30}z \end{pmatrix}$$

2ptos Por encontrar matriz de T

2ptos Por invertir la matriz de T

2ptos Por dar la fórmula de T^{-1}

2. Determine todos los valores de $a \in \mathbb{R}$ para los que la matriz

$$A = \begin{bmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ a & 2a & 0 & a \end{bmatrix}$$

es invertible.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 2a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3a-1 \\ 0 & 1 & a-1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a \begin{vmatrix} 1 & 0 & 3a-1 \\ 1 & a-1 & 2a-1 \\ 0 & 0 & a \end{vmatrix}$$

$$= a^2 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 1 & a-1 \end{vmatrix} = a^2(a-1)$$

$\therefore$ A invertible

$\Leftrightarrow$

$a \neq 0$ y $a \neq 1$

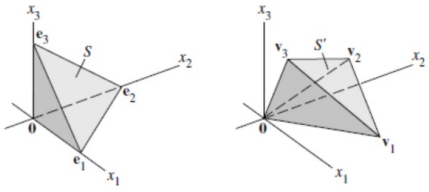
2 ptos x plantear condición

2 ptos x calcular el det e igualar.

1 pto x $a \neq 0$

1 pto x $a \neq 1$.

3. Sea S el tetraedro en $\mathbb{R}^3$ con vértices en los vectores $\vec{0}, \vec{e_1}, \vec{e_2}, \vec{e_3}$ y sea S' el tetraedro con vértices en los vectores $\vec{0}, \vec{v_1} = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v_2} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}, \vec{v_3} = \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, como muestra la figura



Determine el volumen del tetraedro S' si se sabe que el volumen de S es $1/6$.

$e_1 \longrightarrow v_1$

$e_2 \longrightarrow v_2$ $\Longrightarrow$

$e_3 \longrightarrow v_3$

$T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^3$

$\vec{x} \longrightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \vec{x}$

$\Rightarrow$ $\text{volumen}(\tilde{S}) = \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \text{volumen } S \right|$

$\text{volumen } \tilde{S} = \frac{1}{6} \left| \det \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \right|$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$2\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$$= -4$$

$$\therefore \text{volumen } \tilde{S} = \frac{4}{6}$$

2 ptos x matriz de trans

2 ptos x calculo de deter.

2 ptos x volumen de $\tilde{S}$

4. Sea $V = \mathbb{P}_2$ el espacio de polinomios de grado menor o igual que dos y sea

$$H = \{p(x) \in V : p(1) + p(0) = p(-1)\}.$$

a) Demuestre que H es subespacio de V.

b) Encuentre una base para H. Justifique que el conjunto encontrado es una base.

a) i) $0_V \in H$ ya que

$0_V(1) + 0_V(0) = 0 + 0$

$0_V(-1) = 0$

$0_V(1) + 0_V(0) = 0_V(-1)$ ✓

ii) Suponga que $p(x)$ y $q(x) \in H$

$\Rightarrow p+q(1) + p+q(0)$

$= p(1) + q(1) + p(0) + q(0)$

$= \underbrace{p(1) + p(0)} + \underbrace{q(1) + q(0)}$

$= p(-1) + q(-1)$

$= (p+q)(-1)$

$\therefore p+q \in H$

iii) Suponga que $p \in H$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow \lambda p(0) + \lambda p(1) = \lambda(p(0)+p(1))$$
$$= \lambda(p(-1))$$
$$= \lambda P(-1)$$

$\therefore \lambda p \in H$

De i), ii) y iii) $H \leq P_2$

b) Sea $p(x) = ax^2+bx+c$

$$\Rightarrow \begin{aligned} p(0) &= c \\ p(1) &= a+b+c \\ p(-1) &= a-b+c \end{aligned}$$

$$\Rightarrow p(0)+p(1) = p(-1) \Leftrightarrow a+b+2c = a-b+c$$
$$\Leftrightarrow c = -2b$$

$\therefore$

$$p(x) = ax^2 + bx - 2b$$
$$= a x^2 + b(x-2)$$

$\Rightarrow$ $\{x^2, (x-2)\}$ genera a H

Observe que $\{x^2, (x-2)\}$ es li

$\therefore$ $\{x^2, (x-2)\}$ es base para H.

1 pto x demostrar que $0 \in H$
1 pto x suma cerrada
1 pto x ponderación cerrada
1 pt x condición para $\in H$
1 pto x generadores
1 pt x li.

5. Determine si las siguientes afirmaciones son verdaderas o falsas. Justifique sus respuestas.

a) Si A es una matriz de 3×3 tal que el sistema $Ax = \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$ tiene solución única, entonces A es invertible.

b) Si B es una matriz tal que $B^2 - 2B - 3I = 0$ (0 es la matriz nula) entonces B tiene inversa.

a) Si $Ax = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}$ única $\Rightarrow$ la FE de A tiene 3 pivots $\Rightarrow$ A invertible

VERDADERO

b) VERDADERO

$\frac{1}{3} B(B-2I) = I$

$\Rightarrow \frac{1}{3}(B-2I) = B^{-1}$

1 pto x decir que a) es verdadero

2 ptos x justificación

1 pto x decir que b es verdadero

2 pts x justificación