PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2024

Pauta Interrogación 2 - MAT1203

1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que:

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 4 \end{bmatrix}.$$

   a) Determine la matriz de la transformación.

   b) ¿Es cierto que T transforma conjuntos linealmente en conjuntos linealmente independientes?.

Solución:

Observe que $e_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$, por lo tanto $T(e_2) = \begin{bmatrix} -6 \\ 0 \end{bmatrix}$, de manera análoga tenemos que $e_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$ y por lo tanto $T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -2 \end{bmatrix}$, luego la matriz de la transformación es

$$\begin{bmatrix} 2 & -6 & 6 \\ -2 & 0 & 4 \end{bmatrix}.$$

Observe que la matriz de la transformación tiene dos pivotes por lo que NO es inyectiva, luego NO todo conjunto l.i. es l.i. De hecho, $\left\{\begin{bmatrix} 12 \\ 10 \\ 6 \end{bmatrix}\right\}$ es linealmente independiente pero su imagen es el vector nulo, por lo tanto no lo es.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por determinar la imagen de e_2
- (1 punto) Por determinar la imagen de e_1
- (1 punto) Por determinar la matriz.
- (1 punto) Por decir que NO.
- (2 punto) Por justificar correctamente lo anterior, ya sea por argumento o ejemplo.

2. Escriba la inversa de la matriz $A = \begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ como producto de matrices elementales.

Solución:

Observe que al escalonar la matriz A tenemos lo siguiente

$$\begin{bmatrix} -6 & 2 & 1 \\ 0 & -3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad F_1 \leftrightarrow F_3 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_2 \to -\frac{1}{3}F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -6 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \to F_3 + 6F_1 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$F_3 \to F_3 - 2F_2 \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

de lo anterior tenemos que

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot A = I_d$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 6 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1/3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Distribución de puntajes:

- (1 punto) Por escalonar hasta llegar a la identidad.
- (1 punto x4) Por cada matriz elemental del escalonamiento
- (1 punto) Por escribir explicítamente la inversa de A como productos de elementales.

3. a) Sea A una matriz de 3×3 con determinante -3 y sean B, C dos matrices de 3×3 tales que:

   . B es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en A: A la fila tres se le suma dos veces la fila 1.

   . C es la matriz que se obtiene al realizar la siguiente operación en A: Se intercambia la fila 2 con la fila 3.

   Determine el determinante de la matriz $D = 2A^{-1}CB^T$.

   Solución:

   Del enunciado tenemos que $|B| = |A| = 3$, ya que esa operación no cambia el determinante, $|C| = -|A| = 3$, por propiedades sabemos que $|A^{-1}| = |A|^{-1} = -\frac{1}{3}$ y que $|B| = |B^T|$, por lo tanto

   $$|D| = 2^3|A|^{-1}|C| \cdot |B| = 8 \cdot \frac{-1}{3} \cdot 3 \cdot -3 = 24.$$

   Distribución de puntajes:

   - (0.5 punto) Por determinar el determinante de B.
   - (0.5 punto) Por determinar el determinante de C.
   - (0.5 punto) Por 2^3.
   - (0.5 punto) Por determinante de la inversa.
   - (0.5 punto) Por determinante de la traspuesta.
   - (0.5 punto) Por respuesta final.

b) Use la regla de Cramer para encontrar la segunda columna de la inversa de la matriz

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

Solución:

Si $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$, tenemos que la segunda columna de la inversa de A es la solución del sistema $Ax = e_2$. Observe que $|A| = 4$ y entonces usando la regla de Cramer para resolver el sistema tenemos que

$$x_i = \frac{1}{4}|A_i(e_2)|.$$

Al calcular obtenemos que

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix}}{4} = 0, x_1 = \frac{\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}}{4} = \frac{1}{4},$$

por lo tanto la segunda columna de la inversa de la matriz A es $\begin{bmatrix} 1/4 \\ 0 \\ 1/4 \end{bmatrix}$.

Distribución de puntajes:

- (0.5 punto) Por plantear correctamente el sistema.
- (0.5 punto) Por determinar el determinante de A.
- (0.5 punto) Por x_1
- (0.5 punto) Por x_2
- (0.5 punto) Por x_3
- (0.5 punto) Por respuesta final.

4. Demuestre las siguientes afirmaciones:

a) Si el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ de vectores en $\mathbb{R}^n$ es linealmente independiente, entonces el conjunto $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ también es linealmente independiente.

Solución:
Si $\alpha(u-v) + \beta(u+v) + \gamma w = 0$, tenemos que $(\alpha+\beta)u + (\beta-\alpha)v + \gamma w = 0$, como u, v, w es l.i. tendremos que $\alpha + \beta = 0, \beta - \alpha = 0, \gamma = 0$ y por lo tanto

$$\alpha = \beta = \gamma = 0$$

por lo tanto el conjunto $\{\mathbf{u} - \mathbf{v}, \mathbf{u} + \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente.

b) Si A y B son matrices de $n \times n$ tales que AB^T es invertible entonces B es invertible.

Solución:

Como AB^T es invertible, existe C tal que $C(AB^T) = I_d$, entonces $(CA)B^T = I_d$, es decir CA es la inversa de B^T, entonces B^T es invertible, luego B también lo es.

c) Si A es una matriz de $n \times n$ y las columnas de A^2 generan $\mathbb{R}^n$ entonces las columnas de A son linealmente independientes.

Solución:
Si las columnas de A^2 generan $\mathbb{R}^n$ tenemos que A es invertible y por lo tanto $|A^2| \neq 0$, como $|A^2| = |A|^2$ tenemos que $|A| \neq 0$ y por lo tanto A es invertible y de este forma las columnas son l.i.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) Por demostración correcta de a).
- (2 puntos) Por demostración correcta de b).
- (2 puntos) Por demostración correcta de c).