PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2024

Pauta Interrogación 2 - MAT1203

1. Sean
$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & -1 & 1 \end{bmatrix}, U = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$
y A la matriz definida por $PA = LU$, use esta factorización para resolver el sistema $Ax = e_2$.

Solución:

Al multiplicar la ecuación $Ax = e_2$ por P obtenemos el sistema equivalente $PAx = Pe_2 = e_1$ que corresponde al sistema $LUx = e_1$, para resolver este realizamos el cambio de variable $y = Ux$ obtenemos el sistema $Ly = e_1$ cuya matriz ampliada es:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

y cuya solución es $y = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$.

Ahora, necesitamos volver a la variable original, para esto resolvemos el sistema $Ux = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$ cuya matriz ampliada es

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & -2 \end{array}\right]$$

obteniendo como solución $x = \begin{bmatrix} 3 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

Distribución de puntajes:

- (1 punto) por plantear el sistema $PAx = e_1$
- (1 punto) por realizar el cambio de variable $Ux = y$.
- (2 puntos) por resolver $Ly = e_1$.
- (2 puntos) por resolver $Ux = y_0$.

2. Sea A una matriz tal que

$$A^5 = \begin{bmatrix} 3 & 0 & s \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Calcule el determinante de A^5.

Solución:

Al desarrollar el determinante por cofactores tenemos que

$$\det(A^5) = 3\det\left(\begin{bmatrix} -1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) + s\det\left(\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\right) = 2s - 6.$$

b) ¿Para qué valores de $s \in \mathbb{R}$ la traspuesta de la matriz A, es decir A^T, es invertible?

Solución:

Sabemos que A es invertible si y sólo si A^T es invertible, por lo tanto necesitamos determinar para qué valores de s la matriz A es invertible. Por otra parte A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$. Como $\det(A) = \sqrt[5]{\det(A^5)}$, tenemos que A^T es invertible si y sólo si $2s - 6 \neq 0$ es decir si $s \neq 3$.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por determinar el determinante de A^5.
- (1 punto) por saber que es equivalente determinar que A sea invertible.
- (1 puntos) por saber que para que el determinante de A debe ser distinto de cero.
- (1 puntos)por determinar que $|A| \neq 0$ si y solo si $|A^5| \neq 0$
- (1 puntos)por determinar los valores de s.

3. Considere el sistema en variables x, y, z y t

$$\begin{aligned} 2x + y &= 0 \\ x + 2y + z &= 0 \\ y + 2z + t &= 0 \\ z + 2t &= 5 \end{aligned}$$

Resuelva el sistema usando la regla de Cramer.

Solución:

Sea $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{bmatrix}$ la matriz asociada al sistema y $b = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 5 \end{bmatrix}$. Al usar la regla de Cramer para resolver el sistema $A\vec{x} = b$, obtenemos que

$$x = \frac{|A_1(b)|}{|A|}, y = \frac{|A_2(b)|}{|A|}, z = \frac{|A_3(b)|}{|A|}, t = \frac{|A_4(b)|}{|A|}$$

Usando cofactores para calcular el determinante de A obtenemos

$$\begin{aligned} |A| &= 2\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 2\left(2\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}\right) - \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \\ &= 5. \end{aligned}$$

Realizando los cálculos tenemos que

$$|A_1(b)| = -5, |A_2(b)| = 10, |A_3(b)| = -15 \text{ y } |A_4(b)| = 20$$

por lo tanto la solución es $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ -3 \\ 4 \end{bmatrix}$.

Distribución de puntajes:

- (1 puntos) por determinar el determinante de A.
- (1 punto) por determinar $|A_1(b)|$.
- (1 punto) por determinar $|A_2(b)|$.
- (1 punto) por determinar $|A_3(b)|$.
- (1 punto) por determinar $|A_4(b)|$.

- (1 punto) por determinar la solución.

4. Considere el espacio $\mathbb{P}_2$ es espacio de polinomios de grado menor o igual a dos y sea

$$E = \{p(x) \in \mathbb{P}_2 : p(1) = p(2)\}.$$

a) Demuestre que E es subespacio de $\mathbb{P}_2$.
Solución:

Observe que:

i) El polinomio nulo pertenece a E ya que en 1 y 2 valen cero.
ii) Suponga que p y $q \in E$, entonces $(p+q)(1) = p(1) + q(1) = p(2) + q(2) = (p+q)(2)$ por lo tanto $(p+q) \in E$.
iii) Suponga que $p \in E$ y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $(\alpha p)(1) = \alpha p(1) = \alpha p(2) = (\alpha p)(2)$, por lo tanto $(\alpha p) \in E$

De i), ii) y iii) tenemos que E es subespacio de $\mathbb{P}_2$.

b) Encuentre una base para E.
Solución:

observe que $p(x) = ax^2 + bx + c \in E$ si y sólo si $p(1) = a + b + c = p(2) = 4a + 2b + c$, es decir si $b = -3a$, por lo tanto para que un polinomio pertenezca a E debe ser de la forma

$$p(x) = ax^2 - 3ax + c = a(x^2 - 3x) + c,$$

por lo tanto $(x^2 - 3x)$ y 1 generan E y como son l.i. tenemos que forman una base para E.

Distribución de puntajes:

- (1 puntos) por justificar que el polinomio nulo pertenece a E.
- (1 punto) por demostrar que E es cerrado bajo la suma.
- (1 punto) por demostrar que E es cerrado bajo la ponderación escalar.
NOTA: Lo anterior se puede reemplazar mostrando que E es un generado.
- (1 punto) por caracterizar E.
- (1 punto) por encontrar generadores.
- (1 punto) por decir que los generadores son l.i.

5. Considere la transformación $T : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$ definida por

$$T\left(\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3x+y \\ \\ y-z \end{bmatrix}$$

Encuentre el espacio nulo de T y determine si la transformación es uno a uno.

Solución:

El espacio nulo de T corresponde los vectores $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tales que $\begin{bmatrix} 3x+y \\ \\ y-z \end{bmatrix} = \vec{0}$, es decir

$$\text{Nul}\left(\begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{bmatrix}\right) = \text{Gen}\left\langle \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ 3 \end{bmatrix} \right\rangle.$$

Como el espacio nulo de T no es trivial tenemos que T no es uno a uno.

Distribución de puntajes:

- (2 puntos) por conocer como se define el espacio nulo de una transformación.
- (2 punto) por escribir el espacio nulo como conjunto generado.
- (2 puntos) por decir, justificadamente, que la transformación no es uno a uno.