PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2026

Pauta Interrogación 1 - MAT1203

1. En una ciudad inteligente, dos drones autónomos realizan entregas siguiendo trayectorias rectilíneas en el espacio.

   - El **Drone A** despega desde el punto $(1, 2, 0)$ y se desplaza en línea recta siguiendo la dirección del vector $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$.
   - El **Drone B** despega desde el punto $(9, -6, 1)$ y se mueve en línea recta siguiendo la dirección del vector $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$.

   El sistema de control aéreo detecta un posible riesgo de colisión y necesita analizar la situación. Para esto:

   (a) Describa las trayectorias de ambos drones mediante ecuaciones paramétricas.

   (b) Demuestre que las trayectorias de los drones se intersectan. Determine el punto en común de dichas trayectorias.

   (c) Para evitar el riesgo, se decide reprogramar el punto de despegue del Drone B, manteniendo su dirección de movimiento.
   Describa las condiciones que debe cumplir el nuevo punto de partida $P = (a, b, c)$ para que la trayectoria del Drone B no intersecte con la del Drone A.

Solución:

(a) La trayectoria del Drone A es la recta que pasa por el punto $(1, 2, 0)$ con dirección $\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, por lo tanto una ecuación paramétrica es

$$\ell_A : \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

La trayectoria del Drone B es la recta que pasa por el punto $(9, -6, 1)$ con dirección $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, por lo tanto una ecuación paramétrica es

$$\ell_B : \quad \begin{cases} x = 9 - s \\ y = -6 + s \\ z = 1 + s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

(b) Para determinar si las trayectorias se intersectan, igualamos las ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} 1 + t = 9 - s \\ 2 - t = -6 + s \\ 2t = 1 + s \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene que

$$t + s = 8.$$

La segunda ecuación equivale a

$$-t - s = -8,$$

que es consistente con la anterior.
De la tercera ecuación se tiene

$$2t - s = 1.$$

Resolvemos entonces el sistema

$$\begin{cases} t + s = 8 \\ 2t - s = 1 \end{cases}$$

Sumando ambas ecuaciones:

$$3t = 9 \quad \Longrightarrow \quad t = 3.$$

Luego,

$$s = 8 - 3 = 5.$$

Como existen parámetros $t = 3$ y $s = 5$ que satisfacen simultáneamente el sistema, concluimos que las trayectorias se intersectan.
El punto de intersección es

$$(1 + 3,\ 2 - 3,\ 2 \cdot 3) = (4, -1, 6).$$

(c) Sea ahora $P = (a, b, c)$ el nuevo punto de partida del Drone B. Manteniendo la misma dirección, la nueva trayectoria del Drone B es

$$\ell'_B : \quad \begin{cases} x = a - s \\ y = b + s \\ z = c + s \end{cases} \qquad s \in \mathbb{R}.$$

Para determinar cuándo esta nueva trayectoria intersecta a la trayectoria del Drone A, igualamos con la recta

$$\ell_A : \quad \begin{cases} x = 1 + t \\ y = 2 - t \\ z = 2t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Debemos entonces estudiar la consistencia del sistema

$$\begin{cases} 1 + t = a - s \\ 2 - t = b + s \\ 2t = c + s \end{cases}$$

Reordenando, obtenemos

$$\begin{cases} t + s = a - 1 \\ -t - s = b - 2 \\ 2t - s = c \end{cases}$$

La matriz ampliada asociada es

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a-1 \\ -1 & -1 & b-2 \\ 2 & -1 & c \end{array}\right].$$

Aplicando operaciones elementales:

$$\left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a-1 \\ -1 & -1 & b-2 \\ 2 & -1 & c \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & a-1 \\ 0 & 0 & a+b-3 \\ 0 & -3 & c-2a+2 \end{array}\right].$$

Para que las trayectorias se intersecten, este sistema debe ser consistente. Como la segunda fila representa la ecuación

$$0 = a + b - 3,$$

el sistema es consistente si y sólo si

$$a + b = 3.$$

Por lo tanto, la nueva trayectoria del Drone B no intersecta a la del Drone A si y sólo si

$$a + b \neq 3.$$

En consecuencia, el nuevo punto de partida $P = (a, b, c)$ debe satisfacer que

$$a + b \neq 3.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 pto	Describe correctamente la trayectoria del Drone A mediante ecuaciones paramétricas.
C2	0.5 pto	Describe correctamente la trayectoria del Drone B mediante ecuaciones paramétricas.
C3	1 pto	Plantea correctamente el sistema asociado a la intersección de ambas trayectorias.
C4	1 pto	Resuelve correctamente el sistema y concluye que las trayectorias se intersectan.
C5	1 pto	Determina el punto de intersección de las trayectorias.
C6	1 pto	Describe correctamente la nueva trayectoria del Drone B con punto inicial (a, b, c) y la misma dirección.
C7	1 pto	Determina y justifica correctamente la condición $a+b \neq 3$ para que no haya intersección.

2. Sea A una matriz de tamaño 3×4 con columnas v_1, v_2, v_3 y v_4, tales que $\{v_1, v_2\}$ es linealmente independiente, $v_1 + v_2 = v_3$ y que $v_2 + v_3 = v_4$.

   (a) Resuelva el sistema $Ax = 0$.

   (b) Resuelva el sistema $Ax = 2v_1 - v_2$.

   (c) A qué objeto geométrico corresponde el conjunto generado por las columnas de A.

   Solución:

   (a) Observamos que de las relaciones dadas se obtiene que

   $$v_3 = v_1 + v_2 \qquad \text{y} \qquad v_4 = v_2 + v_3 = v_1 + 2v_2.$$

   por lo tanto si

   $$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$

   tenemos que

   $$Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4 = (x_1 + x_3 + x_4)v_1 + (x_2 + x_3 + 2x_4)v_2.$$

   Dado que $\{v_1, v_2\}$ es l.i. se tiene que, resolver $Ax = 0$ equivale a resolver el sistema

   $$\begin{cases} x_1 + x_3 + x_4 = 0 \\ x_2 + x_3 + 2x_4 = 0 \end{cases}$$

   tomando

$x_3 = s, \qquad x_4 = t$, se obtiene

$$x_1 = -s - t, \qquad x_2 = -s - 2t.$$

Por lo tanto, el conjunto solución es

$$\left\{ \begin{bmatrix} -s-t \\ -s-2t \\ s \\ t \end{bmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) Sabemos que Ax es una combinación lineal de las columnas de A, donde los ponderadores son las entradas del vector x. En efecto, si

$$x = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix},$$

entonces

$$Ax = x_1v_1 + x_2v_2 + x_3v_3 + x_4v_4.$$

Como

$$2v_1 - v_2 = 2v_1 + (-1)v_2 + 0v_3 + 0v_4,$$

se tiene que una solución particular es

$$x_p = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

Del inciso anterior, el conjunto solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es

$$\left\{ s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

Por lo tanto, el conjunto solución de $Ax = 2v_1 - v_2$ es

$$\left\{ \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} : s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

(c) Como

$$v_3 = v_1 + v_2 \qquad \text{y} \qquad v_4 = v_1 + 2v_2,$$

todas las columnas de A pertenecen a $\text{Gen}\{v_1, v_2\}$. Luego,

$$\text{Gen}\{v_1, v_2, v_3, v_4\} = \text{Gen}\{v_1, v_2\}.$$

Como v_1 y v_2 son linealmente independientes tenemos que el conjunto generado por las columnas de A corresponde a un plano que pasa por el origen.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	0.5 pto	Reconoce que $v_3 = v_1 + v_2$ y $v_4 = v_1 + 2v_2$.
C2	0.5 pto	Expresa correctamente Ax como combinación lineal de v_1 y v_2.
C3	1 pto	Resuelve correctamente el sistema asociado dado que el conjunto $\{v_1, v_2\}$ es l.i.
C4	1 pto	Reconoce una solución particular de $Ax = 2v_1 - v_2$.
C5	1 pto	Describe correctamente la solución general como suma de una solución particular y la solución del sistema homogéneo.
C6	1 pto	Justifica que las columnas de A pertenecen a $\text{Gen}\{v_1, v_2\}$.
C7	1 pto	Concluye que el conjunto generado por las columnas es un plano por el origen.

3. Determine qué condiciones deben cumplir $a, b \in \mathbb{R}$ para que la intersección de los planos

$$\begin{cases} x + y + z = 1, \\ x + 2y + 3z = 2, \\ 2x + ay + bz = 3 \end{cases}$$

corresponda a una recta en $\mathbb{R}^3$. Para dichos valores de a y b, determine una ecuación paramétrica de esa recta.

Solución.

Consideremos la matriz aumentada del sistema:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 2 \\ 2 & a & b & 3 \end{array}\right]$$

Aplicamos operaciones elementales por filas:

$$F_2 \to F_2 - F_1, \qquad F_3 \to F_3 - 2F_1,$$

obteniendo

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & a-2 & b-2 & 1 \end{array}\right].$$

Luego,

$$F_3 \to F_3 - (a-2)F_2,$$

resultando

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & b-2a+2 & 3-a \end{array}\right].$$

Para que la solución del sistema corresponda a una recta en $\mathbb{R}^3$, el sistema debe ser consistente y tener una variable libre. Esto ocurre si y solo si la matriz tiene dos pivotes y no existe una fila de la forma $[0\,0\,0\,|c]$ con $c \neq 0$. Por lo tanto, debe cumplirse:

$$b-2a+2=0 \qquad \text{y} \qquad 3-a=0.$$

De $3-a=0$ se obtiene

$$a=3.$$

Reemplazando en la primera ecuación:

$$b-2(3)+2=0 \Longrightarrow b-4=0 \Longrightarrow b=4.$$

Por lo tanto, la intersección corresponde a una recta si y solo si

$$\boxed{a=3, \quad b=4.}$$

Para estos valores, el sistema queda

$$\begin{cases} x+y+z=1, \\ x+2y+3z=2, \\ 2x+3y+4z=3. \end{cases}$$

y por lo tanto realizando las mismas operaciones elementales que se hicieron anteriormente se obtiene la matriz ampliada

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Tomando $z=t$, con $t \in \mathbb{R}$, se obtiene

$$y=1-2t.$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$x+(1-2t)+t=1 \Longrightarrow x=t.$$

Así, una ecuación paramétrica de la recta solución es

$$x=t,\ y=1-2t,\ z=t.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	Plantear la matriz ampliada asociada.
C2	1 pto	Por escalonar.
C3	1 pto	Por plantear la condición $b - 2a + 2 = 0$.
C4	1 pto	Por plantear la condición $3 - a = 0$.
C5	1 pto	Por determinar a y b.
C6	1 pto	Escribir la solución de forma paramétrica.

4. Sea $T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \qquad T\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix}.$$

   (a) Determine la matriz asociada a T.

   (b) Calcule $T\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$ para $\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

   (c) ¿El vector $\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}$ pertenece a la imagen de T?

Solución:

Sea A la matriz asociada a T. Como

$$T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} + T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

y además

$$T\begin{bmatrix}0\\-1\end{bmatrix} = -T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix},$$

se obtiene primero que

$$T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = -\begin{bmatrix}0\\1\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix}.$$

Luego,

$$T\begin{bmatrix}1\\0\end{bmatrix} = T\begin{bmatrix}1\\1\end{bmatrix} - T\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}0\\-1\\-1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\1\\2\end{bmatrix}.$$

Por lo tanto, la matriz asociada a T es

$$A = \begin{bmatrix}1 & 0\\1 & -1\\2 & -1\end{bmatrix}.$$

Además, para todo $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$,

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = x\,T\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + y\,T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = x\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + y\begin{bmatrix} 0 \\ -1 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ x-y \\ 2x-y \end{bmatrix}.$$

Finalmente, para determinar si el vector

$$\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

pertenece a la imagen de T, se debe estudiar si existe

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

tal que

$$T\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

Esto equivale a resolver el sistema

$$\begin{cases} x = 2, \\ x - y = 1, \\ 2x - y = 3. \end{cases}$$

De la primera ecuación se obtiene $x = 2$. Reemplazando en la segunda,

$$2 - y = 1 \quad \Rightarrow \quad y = 1.$$

Verificando en la tercera tenemos que:

$$2 \cdot 2 - 1 = 3,$$

por lo tanto

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

luego $\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$ pertenece a la imagen de T. **Criterio de evaluación.**

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1 pto	Por determinar $T(e_1)$.
C2	1 pto	Por determinar $T(e_2)$.
C3	1 pto	Por la matriz .
C4	1 pto	Por la fórmula para T.
C5	1 pto	Por plantear sistema correspondiente.
C6	1 pto	Por determinar que el vector pertenece a la imagen.