PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
TAV 2026

Pauta Interrogación 1 - MAT1203

1. Considere las rectas $L_1 : \left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right\}$ y $L_2 : \left\{ \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ -2 \end{bmatrix} \right\}$

   (a) Determine si las rectas L_1 y L_2 intersectan.
   Solución:

   Las rectas se intersectan si y solo si existen reales t y s tales que

   $$\begin{cases} 1 + t = 2s \\ -1 + 2t = 2 + 4s \\ 2 - t = -1 - 2s \end{cases}$$

   de la primera ecuación tenemos que $t = 2s - 1$, si reemplazamos esto en la segunda ecuación obtenemos que $-1 + 2(2s - 1) = 2 + 4s$ lo que equivale a $-3 = 2$, por lo tanto las rectas no intersectan.

   (b) Determine, en caso que sean posible, una ecuación general del plano que contiene a L_1 y L_2.
   Solución:

   Observemos que la dirección $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix}$, que corresponde a la dirección de ambas rectas, está contenida en el plano que contiene a ambas, por otra parte el plano contiene a los puntos $(1, -1, 2)$ y $(0, 2, -1)$ por lo tanto el vector que une estos dos puntos, $\begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}$, está contenido en el plano, por lo tanto una ecuación vectorial del plano que contiene a ambas rectas es

   $$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

   Esto equivale al sistema

   $$\begin{cases} x = 1 + t - s \\ y = -1 + 2t + 3s \\ z = 2 - t - 3s \end{cases}$$

De la primera ecuación, $t = x - 1 + s$. Sustituyendo en la tercera:

$$z = 2 - (x - 1 + s) - 3s = 3 - x - 4s,$$

de donde

$$s = \frac{3 - x - z}{4}.$$

Reemplazando en la ecuación de y:

$$y = -1 + 2(x - 1 + s) + 3s = 2x - 3 + 5s.$$

Sustituyendo el valor de s:

$$y = 2x - 3 + \frac{5(3 - x - z)}{4}.$$

obteniendo que

$$3x - 4y - 5z = -3$$

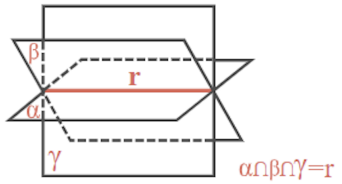
es una ecuación general que contiene a L_1 y L_2.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**0.5 pto**	Representa la intersección de las rectas como un sistema
C2	**1 pto**	Usa métodos algebraicos para determinar si el sistema tiene solución
C3	**1 pto**	Concluye, justificadamente, que el sistema es inconsistente y por lo tanto las rectas no intersectan.
C4	**1 pto**	Reconoce que la dirección común de ambas rectas está en el plano
C5	**1 pto**	Determina otra dirección contenida en el plano
C6	**0.5 pto**	Representa el plano con una ecuación vectorial
C7	**1 pto**	Determina una ecuación general de la recta

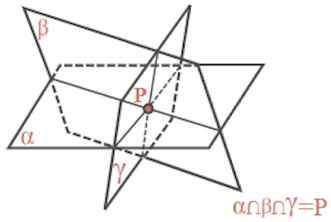
2. Determine cuáles de los sistemas de ecuaciones lineales que aparecen en la columna de la izquierda, podrían corresponder a las posiciones relativas de planos ilustradas en la columna de la derecha. Justifique su respuesta en cada caso.

$$A \quad \begin{cases} x+y-z &= 3 \\ x-y-z &= 1 \\ 2x+y-2z &= 0 \end{cases}$$



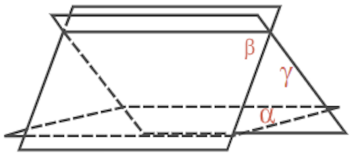
I

$$B \quad \begin{cases} x+y-z &= 3 \\ x-y-z &= 1 \\ x+2y-z &= 4 \end{cases}$$



II

$$C \quad \begin{cases} x+y-z &= 3 \\ x-y-z &= 1 \\ x+2y+z &= 1 \end{cases}$$



III

Solución:
Dado que las dos primeras ecuaciones de los tres sistemas son las mismas, podemos construir una matriz ampliada que contenga a todas las ecuaciones y escalonarla para realizar el análisis.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 4 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right]$$

Así, tenemos formas escalonadas de cada uno de los sistemas anteriores:

$$A = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \qquad B = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right] \qquad C = \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -3/2 \end{array}\right]$$

Como se puede ver, el sistema A no tiene solución, porque su tercera ecuación se transforma en una contradicción. Esta situación corresponde al gráfico III, donde no hay intersección de los tres planos.

Para el sistema B hay dos variables principales y una libre, por lo que el sistema tiene infinitas soluciones, que se representan por una recta. Esta situación se describe en el gráfico I.

En el sistema C todas las variables son principales, la solución del sistema es única y corresponde a un punto, como se describe en el gráfico II.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**0.5 pto**	Representa loss sistemas matricialmente
C2	**1 pto**	Escalona la matriz o resuelve sistemas
C3	**1 pto**	Determina que A es inconsistente
C4	**0.5 pto**	Relaciona A con III.
C5	**1 pto**	Determina que B tiene una variable libre
C6	**0.5 pto**	Relaciona B con I.
C7	**1 pto**	Determina que C tiene solución única
C8	**0.5 pto**	Relaciona C con II.

3. a) Demuestre que si el conjunto $\{v, u\}$ es linealmente independiente, entonces el conjunto $\{u + 2v, 5u - v\}$ también es linealmente independiente.

Solución:

Supongamos que

$$\alpha(u + 2v) + \beta(5u - v) = 0$$

Desarrollando esta combinación lineal:

$$\alpha u + 2\alpha v + 5\beta u - \beta v = 0$$

Agrupando los términos semejantes:

$$(\alpha + 5\beta)u + (2\alpha - \beta)v = 0$$

Como por hipótesis el conjunto $\{u, v\}$ es linealmente independiente, la única solución de la ecuación anterior es:

$$\alpha + 5\beta = 0 \quad \text{y} \quad 2\alpha - \beta = 0$$

Resolviendo este sistema:

De la segunda ecuación:

$$2\alpha = \beta \Rightarrow \beta = 2\alpha$$

Sustituyendo en la primera ecuación:

$$\alpha + 5(2\alpha) = \alpha + 10\alpha = 11\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0 \Rightarrow \beta = 0$$

entonces , $\alpha = \beta = 0$, por lo tanto el conjunto $\{u + 2v, 5u - v\}$ es también li.

b) Determine, en caso que exista, todos los valores de $h \in \mathbb{R}$, de manera que

$$\text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\0\\1\end{bmatrix}\right\} = \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}h\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-6\\h\end{bmatrix}\right\}.$$

Solución:

Observe que, para que estos conjuntos generados sean iguales, debe cumplirse que:

i)
$$\begin{bmatrix}h\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-6\\h\end{bmatrix} \in \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\0\\1\end{bmatrix}\right\}.$$

ii)
$$\begin{bmatrix}2\\1\\0\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}-6\\0\\1\end{bmatrix} \in \text{Gen}\left\{\begin{bmatrix}h\\2\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\-6\\h\end{bmatrix}\right\}.$$

Para que se cumpla i), se calcula la matriz aumentada asociada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 2 & -6 & h & 0 \\ 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & h \end{array}\right].$$

Al escalonar esta matriz se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & 2 & -6 \\ 0 & 1 & 1 & h \\ 0 & 0 & h+2 & 12+6h \end{array}\right].$$

De aquí se concluye que la condición i) se cumple si y solo si

$$h + 2 = 0,$$

es decir, si $h = -2$.

Para $h = -2$, debemos verificar que se cumpla la condición ii). Para ello consideramos la matriz aumentada:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} -2 & 0 & 2 & -6 \\ 2 & -6 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

Al escalonar, se obtiene:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

Por lo tanto, se cumple la condición ii) y, por lo tanto, los conjuntos generadores coinciden para

$$h = -2.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	1 pto	**Representa** combinaciones lineales de vectores utilizando notación algebraica adecuada.
C2	1 pto	**Desarrolla** correctamente una combinación lineal y agrupa términos semejantes dentro del mismo registro algebraico.
C3	1 pto	**Aplica** la definición de independencia lineal para concluir justificadamente la nulidad de los coeficientes.
C4	1 pto	**Relaciona** la igualdad de conjuntos generadores con la inclusión mutua de vectores.
C5	1 pto	**Opera** sobre una matriz aumentada mediante operaciones elementales por filas.
C6	1 pto	**Aplica** el análisis de la matriz escalonada para determinar correctamente el valor del parámetro.

4. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}2\\9\\-2\end{bmatrix}, T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}8\\7\\8\end{bmatrix} \text{ y } T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\3\\7\end{bmatrix}.$$

a) Encuentre la imagen de $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$.

Solución:

Queremos calcular $T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right)$.

Dado que T es lineal, escribimos el vector $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ como combinación lineal de los vectores:

$$v_1 = \begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix}, \quad v_2 = \begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \quad v_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}.$$

Buscamos escalares a, b, c tales que:

$$av_1 + bv_2 + cv_3 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Sumando:

$$a\begin{bmatrix}1\\2\\1\end{bmatrix} + b\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix} + c\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}a+b\\2a\\a+b+c\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}.$$

Obtenemos el sistema:

$$\begin{cases} a+b=0 \\ 2a=1 \\ a+b+c=0 \end{cases} \Rightarrow a=\frac{1}{2}, \quad b=-\frac{1}{2}, \quad c=0.$$

Entonces:

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = T\left(\tfrac{1}{2}v_1 - \tfrac{1}{2}v_2\right) = \tfrac{1}{2}T(v_1) - \tfrac{1}{2}T(v_2).$$

Sustituyendo:

$$\tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}2\\9\\-2\end{bmatrix} - \tfrac{1}{2}\begin{bmatrix}8\\7\\8\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}1\\\frac{9}{2}\\-1\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}4\\\frac{7}{2}\\4\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\1\\-5\end{bmatrix}.$$

$$\boxed{T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3\\1\\-5\end{bmatrix}}$$

b) Encuentre la matriz de la transformación.

Solución:

Nuestro objetivo es encontrar la matriz asociada a la transformación lineal $T:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ respecto de la base canónica. Para ello, necesitamos conocer las imágenes de los vectores canónicos $e_1 = \begin{bmatrix}1\\0\\0\end{bmatrix}$, $e_2 = \begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$ y $e_3 = \begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}$. La matriz de T estará formada por estas imágenes como columnas:

$$[T] = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix}.$$

Ya conocemos directamente la imagen de e_3, pues se nos da que

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\3\\7\end{bmatrix}.$$

También, en el inciso anterior (a), encontramos que

$$T\left(\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}-3\\1\\-5\end{bmatrix},$$

por lo tanto $T(e_2)$ está determinada.

Para encontrar $T(e_1)$, usaremos los datos entregados. Sabemos que:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}8\\7\\8\end{bmatrix}, \quad \text{y} \quad T\left(\begin{bmatrix}0\\0\\1\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}6\\3\\7\end{bmatrix}.$$

Pero el vector $\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ puede escribirse como $e_1 + e_3$, y como T es lineal, se cumple:

$$T\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}\right) = T(e_1 + e_3) = T(e_1) + T(e_3).$$

Sustituyendo las imágenes conocidas, obtenemos:

$$\begin{bmatrix}8\\7\\8\end{bmatrix} = T(e_1) + \begin{bmatrix}6\\3\\7\end{bmatrix},$$

de donde se despeja fácilmente:

$$T(e_1) = \begin{bmatrix}8\\7\\8\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}6\\3\\7\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2\\4\\1\end{bmatrix}.$$

Con estos tres vectores, ya podemos construir la matriz de T en la base canónica:

$$[T] = \begin{bmatrix} T(e_1) & T(e_2) & T(e_3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\4 & 1 & 3\\1 & -5 & 7\end{bmatrix}.$$

c) Determine si la transformación es inyectiva.

Solución:

En el inciso anterior se obtuvo que la matriz de T respecto de la base canónica es:

$$[T] = \begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\4 & 1 & 3\\1 & -5 & 7\end{bmatrix}.$$

Procedemos ahora a escalonar esta matriz. Partimos utilizando el elemento 2 de la primera fila como pivote. Eliminamos las entradas que se encuentran debajo de él mediante operaciones elementales por filas. Al hacer esto, la matriz se transforma en:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\0 & 7 & -9\\0 & -\frac{7}{2} & 4\end{bmatrix}.$$

A continuación, usamos el pivote 7 de la segunda fila para eliminar la entrada correspondiente en la tercera fila. Tras realizar la operación correspondiente, obtenemos la matriz escalonada:

$$\begin{bmatrix}2 & -3 & 6\\0 & 7 & -9\\0 & 0 & -\frac{1}{2}\end{bmatrix}.$$

Observamos que la matriz escalonada presenta un pivote en cada una de sus columnas. Esto implica que el sistema homogéneo asociado solo admite la solución trivial, es decir, el núcleo de T es $\{0\}$.

Por lo tanto la transformación lineal T es inyectiva.

Criterio de evaluación.

Criterio	**Puntaje**	**Indicador**
C1	1 pto	**Coordina** la representación de un vector como combinación lineal de otros vectores conocidos.
C2	1 pto	**Aplica** la linealidad de la transformación para determinar correctamente la imagen de un vector.
C3	1 pto	**Relaciona** las imágenes de los vectores canónicos con la matriz asociada a la transformación lineal.
C4	1 pto	**Construye** correctamente la matriz de la transformación a partir de sus columnas.
C5	1 pto	**Opera** sobre la matriz asociada a la transformación utilizando operaciones elementales por filas.
C6	1 pto	**Aplica** el criterio de pivotes para determinar justificadamente la inyectividad de la transformación.