PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Segundo semestre 2025

# Interrogación 1 - MAT1203

1. (a) Verifique que los puntos $A(1,1,-1)$ y $B(1,0,0)$ pertenecen al plano de ecuación

$$\Pi : 3x + 2y + 2z = 3.$$

Demuestre que la recta que pasa por $A$ y $B$ está contenida en el plano $\Pi$.

(b) Demuestre que si dos puntos $A$ y $B$ está en un plano en $\mathbb{R}^3$, entonces la recta que pasa por $A$ y $B$ está contenida en dicho plano.

**Solución:**

(a) Reemplazando en el lado izquierdo de la ecuación del plano las coordenadas del punto $A$ se obtiene $3(1)+2(1)+2(-1) = 3$ y por las coordenadas de $B$ se obtiene $3(1)+2(0)+2(0) = 3$ por lo tanto $A$ y $B$ pertenecen al plano $\Pi$.
La ecuación paramétrica de la recta que pasa por $A$ y $B$ es $x = 1, y = t, z = -t$, reemplazando en la ecuación del planos se tiene que $3(1) + 2(t) - 2(t) = 3$ para todo $t \in \mathbb{R}$, por lo tanto la recta está contenida en el plano.

(b) Sea $\Pi$ el plano en $\mathbb{R}^3$ definido por la ecuación general

$$\Pi : ax + by + cz = d,$$

con $(a,b,c) \neq (0,0,0)$.
Supongamos que $A = (x_1, y_1, z_1)$ y $B = (x_2, y_2, z_2)$ son puntos que pertenecen al plano $\Pi$, es decir,

$$ax_1 + by_1 + cz_1 = d \quad \text{y} \quad ax_2 + by_2 + cz_2 = d.$$

La recta que pasa por $A$ y $B$ se puede parametrizar como

$$\vec{r}(t) = (1-t)(x_1, y_1, z_1) + t(x_2, y_2, z_2), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Sea $P(t) = \vec{r}(t)$ un punto cualquiera en la recta. Entonces

$$P(t) = (x(t), y(t), z(t)) = ((1-t)x_1 + tx_2,\ (1-t)y_1 + ty_2,\ (1-t)z_1 + tz_2).$$

Evaluamos $P(t)$ en la ecuación del plano:

$$\begin{aligned} ax(t) + by(t) + cz(t) &= a[(1-t)x_1 + tx_2] + b[(1-t)y_1 + ty_2] + c[(1-t)z_1 + tz_2] \\ &= (1-t)(ax_1 + by_1 + cz_1) + t(ax_2 + by_2 + cz_2) \\ &= (1-t)d + td = d. \end{aligned}$$

Por lo tanto, $P(t) \in \Pi$ para todo $t \in \mathbb{R}$, lo cual demuestra que la recta que pasa por $A$ y $B$ está contenida en el plano $\Pi$.

## Criterio de evaluación.

| Criterio | Puntaje | Indicador |
|---|---|---|
| **C1** | **0.5 pto** | Reconocer que A está en el plano. |
| **C2** | **0.5 pto** | Reconocer que A está en el plano. |
| **C3** | **1 pto** | Determinar la ecuación que pasa por $A$ y $B$. |
| **C4** | **1 pto** | Reconocer que toda la recta está en el plano. |
| **C5** | **1 pto** | Por describir cuando una punto está en un plano dado. |
| **C6** | **1 pto** | Por determinar la ecuación de la recta que pasa por dos puntos. |
| **C7** | **1 pto** | Por determinar que la recta que une dos puntos de un plano está contenida en dicho plano. |

2. Sea $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$.

   (a) ¿Es el vector $b = \begin{bmatrix} -2 \\ 4 \\ 1 \\ 6 \end{bmatrix}$ combinación lineal de las columnas de $A$?

   (b) ¿Cuál columna de A podríamos eliminar para construir una matriz $B$ de modo que el sistema $Bx = 0$ tenga solución única? Justifique su respuesta.

**Solución:**

(a) Para determinar si $b$ es combinación lineal de las columnas de $A$, resolvemos el sistema

$$Ax = b.$$

La matriz aumentada es

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 2 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 6 \end{array}\right].$$

Aplicando eliminación gaussiana se obtiene

$$\left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right].$$

La última fila corresponde a la ecuación $0 = 1$, lo cual es una contradicción. Por lo tanto, el sistema no tiene solución, luego $b$ no es combinación lineal de las columnas de $A$.

(b) Para que el sistema $Bx = 0$ tenga solución, todas las columnas de la FE de la matriz $B$ deben tener pivotes. Del escalonamiento anterior, los pivotes están en las columnas 1, 2 y 4, por lo tanto podemos tomar

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

cuya FE es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

que por tener igual cantidad de pivotes que columnas se tiene que $Bx = 0$ tiene solución única.

## Criterio de evaluación.

| Criterio | Puntaje | Indicador |
|---|---|---|
| **C1** | **1 pto** | Por plantear que se necesita determinar si Ax=b es consistente o no o algo equivalente |
| **C2** | **1 pto** | Por escalonar la matriz ampliada. |
| **C3** | **1 pto** | Determinar que el sistema es inconsistente. |
| **C4** | **1 pto** | Por concluir que b no es combinación lineal de las columnas de A. |
| **C5** | **1 pto** | Por determinar que hay que eliminar la tercera columna. |
| **C6** | **1 pto** | Por justificar que Bx=0 tiene solución única. |

3. Considere los siguientes planos en $\mathbb{R}^3$, donde $a$ es un número real.

$$\Pi_1 \ : \ x+y+z=1\ , \qquad \Pi_2 \ : \ x+y+az=a^2\ , \qquad \Pi_1 \ : \ a^2x+a^2y+z=1$$

(a) ¿Existe algún valor de $a \in \mathbb{R}$ para el cual los tres planos sean coincidentes?

(b) ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$ la intersección de los tres planos es una recta?

(c) ¿Existen valores de $a \in \mathbb{R}$ de forma que los tres planos se intersecten en un solo punto?

**Solución:** Escribimos la matriz ampliada del SEL y realizamos el algoritmo de Gauss.

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a & a^2 \\ a^2 & a^2 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_2 \to F_2 - F_1 \\ F_3 \to F_3 - a^2F_1 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & a^2-1 \\ 0 & 0 & 1-a^2 & 1-a^2 \end{array}\right]$$

Si $a = 1$, la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

por lo tanto, la solución es un plano.

Si $a \neq 1$, entonces realizamos las operaciones: $F_2 \to \dfrac{1}{a-1}F_2$ y $F_3 \to \dfrac{1}{1-a}F_3$, obteniendo la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1+a & 1+a \end{array}\right]$$

Si ahora, $a = -1$ se tiene la matriz

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

por lo tanto, la solución es una recta.

En el caso de que $a \neq 1$ y $a \neq -1$, realizamos la operación $F_3 \to \dfrac{1}{1+a}$ y la matriz queda

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} F_3 \to F_3 - F_2 \\ \sim \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & a+1 \\ 0 & 0 & 0 & -a \end{array}\right].$$

En este caso, si $a = 0$, la solución del sistema es una recta y si $a \neq 0$, el sistema no tiene solución.

(a) Sí, para $a = 1$ los tres planos son coincidentes.

(b) Para $a = 0$ y para $a = -1$.

(c) No. El sistema nunca tiene solución única.

## Criterio de evaluación.

| Criterio | Puntaje | Indicador |
|---|---|---|
| **C1** | **0.5 pto** | Por realizar operaciones elementales para poner ceros bajo el pivote de la prime |
| **C2** | **1 pto** | Por estudiar matricialmente caso a=1. |
| **C3** | **1 pto** | Por estudiar matricialmente caso a=-1. |
| **C4** | **1 pto** | Por estudiar matricialmente $a \neq 1, a \neq -1$. |
| **C5** | **1 pto** | Por responder justificadamente (a). |
| **C6** | **1 pto** | Por responder justificadamente (b). |
| **C7** | **0.5 pto** | Por responder justificadamente (c)<br>está contenida en dicho plano. |

4. El sistema de ecuaciones $Ax = b$ tiene como conjunto solución

$$\left\{ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ : \ \text{con } t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

   (a) ¿Cuál es el conjunto solución del sistema de ecuaciones $Ax = 0$?

   (b) ¿Es el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ solución del sistema $Ax = b$? Justifique.

   (c) ¿Existe un vector $c$ tal que el sistema de ecuaciones $Ax = c$ tenga como conjunto solución una recta? Justifique.

**Solución:**

(a) El conjunto solución del sistema de ecuaciones homogéneo $Ax = 0$ es

$$\left\{ t \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \ : \ \text{con } t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

(b) No, porque el vector $\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, al ser solución particular del sistema de ecuaciones satisface $A\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = b$. Además, como $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, se tiene que $A\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix} = 2b \neq b$ porque el sistema no es homogéneo.

**Otra solución:**

Observe que $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ es solución si y sólo si existen $t, s \in \mathbb{R}$ de modo que

$$\begin{aligned} 1 - t &= 2 \\ 2 + t &= 4 \\ 1 + t + s &= 2 \\ t + 2s &= 0 \end{aligned}$$

de la primera ecuación se tiene que $t = -1$ pero de la segunda se tiene que $t = 2$, por lo tanto no existen tales parámetros, por lo tanto el vector $\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}$ no es solución del sistema.

(c) No, porque si el sistema de ecuaciones $Ax = c$ fuese consistente, su conjunto solución sería una traslación del conjunto solución de $Ax = b$, por lo tanto, siempre sería un plano.

## Criterio de evaluación.

| Criterio | Puntaje | Indicador |
|---|---|---|
| **C1** | **2 puntos** | Reconocer la parte de la solución homogénea. |
| **C2** | **1 pto** | Por responder que no a (b). |
| **C3** | **1 pto** | Por justificar la respuesta de (b). |
| **C4** | **1 pto** | Por responder que no a (c). |
| **C5** | **1 pto** | Por justificar la respuesta de (c). |