PONTIFICIA UNIVERSIDAD CATOLICA DE CHILE
FACULTAD DE MATEMATICAS
DEPARTAMENTO DE MATEMATICA
Primer semestre 2025

Pauta Interrogación 1 - MAT1203

1. a) Sean $\mathbf{u}, \mathbf{v}$ y $\mathbf{w}$ vectores en $\mathbb{R}^n$. Demuestre que si el conjunto $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w}\}$ es linealmente independiente entonces el conjunto $\{\mathbf{u}+\mathbf{v}, \mathbf{u}-\mathbf{3v}, \mathbf{w}+\mathbf{2u}\}$ también lo es.

Una solución de la pregunta

Si $\alpha(u+v)+\beta(u-3v)+\gamma(w+2u)=0$ debemos demostrar que $\alpha=\beta=\gamma=0$, para eso observamos que

$$\alpha(u+v)+\beta(u-3v)+\gamma(w+2u)=(\alpha+\beta+2\gamma)u+(\alpha-3\beta)v+\gamma w=0$$

por hipótesis tenemos que $\{u, v, w\}$ es linealmente independiente por lo tanto

$$\alpha+\beta+2\gamma=\alpha-3\beta=\gamma=0$$

al resolver el sistema vemos que tiene solución única $\alpha=\beta=\gamma=0$, demostrando así que el conjunto $\{u+v, u-3v, w+2u\}$ es linealmente independiente.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Plantear la condición de independencia lineal.
C2	**1 pto**	Establecer el sistema en términos de α, β y γ
C3	**0.5 pto**	Resolver el sistema
C4	**0.5 pto**	Concluir la demostración

b) Determine una ecuación cartesiana para el plano de ecuación vectorial

$$\left\{ t\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} ; t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

Una solución de la pregunta

Queremos encontrar una ecuación normal para el plano dado por la ecuación vectorial

$$\left\{ t\begin{bmatrix}1\\2\\0\end{bmatrix} + s\begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}2\\1\\3\end{bmatrix}, \quad t, s \in \mathbb{R} \right\}.$$

La ecuación vectorial nos dice que un punto genérico en el plano es de la forma

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} t+2s+2 \\ 2t+s+1 \\ 3s+3 \end{bmatrix}.$$

Descomponiendo en ecuaciones escalares obtenemos que

$$x = t + 2s + 2, \quad y = 2t + s + 1, \quad z = 3s + 3.$$

Despejando t de la primera ecuación tenemos que:

$$t = x - 2s - 2.$$

Al sustituir esto en la ecuación de y obtenemos que

$$y = 2(x - 2s - 2) + s + 1$$

luego,

$$y = 2x - 4s - 4 + s + 1 = 2x - 3s - 3.$$

Ahora, si despejamos el parámetro s de la ecuación de z, se tiene que

$$s = \frac{z-3}{3}$$

por lo tanto

$$y = 2x - 3\left(\frac{z-3}{3}\right) - 3$$

simplificando vemos que

$$y = 2x - (z-3) - 3$$

$$y = 2x - z$$

$$2x - y - z = 0.$$

De lo anterior tenemos que una ecuación normal del plano es

$$2x - y - z = 0.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C5	**1 pto**	Describe las ecuaciones paramétricas de un punto en el plano
C6	**1 pto**	Establece las relaciones de los parámtros
C7	**1 pto**	Determina una ecuación normal del plano.

2. Sean $\mathbf{n} \in \mathbb{R}^n$ un vector no nulo y $s \in \mathbb{R}$ fijos. Sea $\mathbb{H}$ el hiperplano definido por su ecuación normal $\mathbb{H} = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n : \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = s\}$.

   a) Encuentre el valor $t \in \mathbb{R}$ tal que $\mathbf{y} = t\mathbf{n}$ pertenezca a $\mathbb{H}$.

Una solución de la pregunta

Se tiene que $\mathbf{y} = t\mathbf{n}$ pertenece a $\mathbb{H}$ si y solo si $\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = s$. Pero $\mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = t\mathbf{n} \cdot \mathbf{n} = t\|\mathbf{n}\|^2$. Igualando y despejando se obtiene $t = s/\|\mathbf{n}\|^2$.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	**Plantear** la condición de pertenencia.
C2	**1 pto**	**Determinar** el valor de t α, β y γ

   b) Verifique que para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ el vector $\mathbf{z} = (\mathbf{x} - \mathbf{y})$, con $\mathbf{y}$ dado por el inciso anterior, es ortogonal a $\mathbf{n}$ y por lo tanto es ortogonal a $\mathbf{y}$.

Una solución de la pregunta

Como $\mathbf{x}$ e $\mathbf{y}$ pertenecesn a $\mathbb{H}$ entonces $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = s$. Luego

$$\mathbf{z} \cdot \mathbf{n} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} = \mathbf{x} \cdot \mathbf{n} - \mathbf{y} \cdot \mathbf{n} = s - s = 0$$

y $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{n}$. También $\mathbf{z}$ es ortogonal a cualquier escalarización de $\mathbf{n}$, en particular $\mathbf{z}$ es ortogonal a $\mathbf{y} = t\mathbf{n}$.

Criterio	Puntaje	Indicador
C3	**1 pto**	**Plantear** la condición de perpendicular
C4	**1 pto**	**Demostar** lo pedido

   c) Demuestre que $\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|$ para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$ (es decir, demuestre que $\mathbf{y}$ es el vector en $\mathbb{H}$ más cercano al origen). Indicación: Ocupe Pitágoras.

Una solución de la pregunta

Sea $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$. Tenemos que $\mathbf{x} = (\mathbf{x} - \mathbf{y}) + \mathbf{y} = \mathbf{z} + \mathbf{y}$, y sabemos que $\mathbf{z}$ e $\mathbf{y}$ son ortogonales. Por Pitágoras

$$\|\mathbf{x}\|^2 = \|\mathbf{z}\|^2 + \|\mathbf{y}\|^2 \geq \|\mathbf{y}\|^2,$$

con lo que concluimos $\|\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\|$ para cualquier $\mathbf{x} \in \mathbb{H}$.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C5	**1 pto**	Plantear la relación entre x e y.
C6	**1 pto**	Conlcuir la desigualdad

3. Dado el sistema en variables x, y y z

$$\begin{cases} x - az = 2, \\ 2x + ay + az = 5, \\ -x + ay + (5a - 1)z = -a \end{cases}$$

para un escalar a.

a) ¿Para qué valores de a el sistema no tiene solución?

b) ¿Para qué valores de a el conjunto solución del sistema es una recta?

c) Encuentre una ecuación vectorial de la recta solución del inciso b).

Una solución de la pregunta

Escribimos el sistema lineal como la matriz ampliada

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 2 & a & a & 5 \\ -1 & a & 5a-1 & -a \end{bmatrix}$$

Con el método de Gauss, se obtiene

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & a & 3a & 1 \\ 0 & a & 4a-1 & 2-a \end{bmatrix}$$

y

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -a & 2 \\ 0 & a & 3a & 1 \\ 0 & 0 & a-1 & 1-a \end{bmatrix}$$

En el caso de $a = 0$, la segunda fila es $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ y se concluye que no existe ninguna solución.

En el caso de $a = 1$, la matriz ampliada es

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

y se concluye que z es una variable libre y que el conjunto solución está dado por $x = 2 + z$ y $y = 1 - 3z$. La recta que corresponde al conjunto solución está dado por

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t \begin{bmatrix} 1 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$$

para $t \in \mathbb{R}$.

Además observamos que si $a \neq 0$ y $a \neq 1$ entonces el sistema tiene solución única y por tanto el único caso que la solución es una recta es el descrito anteriormente.

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Plantear la matriz asociada al sistema.
C2	**1 pto**	Escalonar la matriz
C3	**1 pto**	Por estudiar caso a=0
C4	**1 pto**	Por estudiar caso a=1
C5	**1 pto**	Por estudiar los otros casos
C6	**1 pto**	Por dar la recta solución

4. Sea T la transformación lineal de $\mathbb{R}^3$ a $\mathbb{R}^3$ tal que

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 6 \\ 3 \\ 2 \end{bmatrix}$$

a) Determine la matriz de la transformación.

Criterio de evaluación.

Observe que la matriz de la transformación es $A = [T(e_1)\, T(e_2)\, T(e_3)]$, del enunciado tenemos que $T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ 7 \\ 1 \end{bmatrix}$, además

$$T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}\right) - T(e_1) = 2T(e_2) = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

por lo tanto $T(e_2) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}$ y $T(e_3) = T\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}\right) - T(e_2) - T(e_1) = \begin{bmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{bmatrix}$ de esta manera tenemos que la matriz es

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 7 & -1 & -3 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C1	**1 pto**	Calcular $T(e_2)$.
C2	**1 pto**	Calcular $T(e_3)$
C3	**1 pto**	Determinar la matriz

b) Determine la imagen bajo T del plano de ecuación $3x + 2y - z = 2$.

Una solución de la pregunta

Un punto genérico del plano es de la forma $t \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}$, por lo tanto un punto genérico de la imagen es de la forma

$$tT\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 3 \end{bmatrix}\right) + sT\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}\right) + T\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ -2 \end{bmatrix}\right)$$

que corresponde al plano de ecuación vectorial

$$t \begin{bmatrix} 8 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} + s \begin{bmatrix} 6 \\ -7 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 \\ 6 \\ -2 \end{bmatrix}$$

Criterio de evaluación.

Criterio	Puntaje	Indicador
C4	**1 pto**	Determinar la imagen de los generadores del plano.
C5	**1 pto**	Determinar la forma genérica de un punto en la imagen
C6	**1 pto**	Determinar una ecuación del plano imagen